

PROIECT: Pozitivitatea în analiza și sinteza sistemelor multidimensionale

– Sinteza rezultatelor obținute în 2007 –

Contract IDEI, cod ID_1033

Nr.intern: AU-12-07-02

Director de proiect: prof.dr.ing. Bogdan Dumitrescu

**Catedra Automatică și Ingineria Sistemelor
Facultatea Automatică și Calculatoare
Universitatea POLITEHNICA București**

30 noiembrie 2007

1 Obiectivele etapei și descrierea sumară a rezultatelor

Proiectul a fost demarat la 1 octombrie 2007, de aceea obiectivele pentru cele trei luni rămase din 2007 au fost relativ modeste, scopul principal fiind acela de a demara lucrul pe mai multe fronturi, urmând ca rezultatele științifice semnificative să fie obținute mai târziu.

Expunem în continuare principalele activități desfășurate, începând cu cele administrative și financiare, și dedicând restul raportului celor științifice.

1.1 Acțiuni administrative

- În proiectul inițial, una dintre cele două poziții pentru tinerii cercetători era liberă. Ea a fost ocupată prin cooptarea în echipă a Adelei Defta, care din septembrie 2007 este doctorand la Facultatea de Automatică și Calculatoare. Adela Defta ocupă acum un post de asistent de cercetare la UPB și a început deja programul de pregătire doctorală.
- Am creat pagina web a proiectului, pe site-ul Grupului de Calcul Numeric (din care face parte B.Dumitrescu). La adresa <http://www.schur.pub.ro/Idei2007.htm> pot fi găsite rapoartele științifice și programele realizate până acum. Pagina va fi actualizată pe măsură ce vor fi obținute rezultate semnificative.

1.2 Utilizarea fondurilor

Bugetul pe 2007 a fost consumat pentru următoarele tipuri de cheltuieli (vezi separat bugetul detaliat)

- salarii pentru membrii echipei
- regia aferentă
- achiziționarea a două calculatoare pentru cei doi tineri cercetători
- consumabile (cartușe toner imprimantă și copiator, hârtie, memory stick-uri pentru membrii echipei și diverse consumabile de birou)

1.3 Rezultate științifice—sumar

Inițial ne-am propus deschiderea a două fronturi de lucru în această perioadă, conform obiectivelor din Anexa IIA, anume primele două de mai jos. Ulterior am decis și abordarea în devans a unei a treia teme, programată pentru anul următor. Temele și realizările de până acum sunt următoarele.

- Obiectiv 1: studiu comparativ bibliotecii de optimizare convexă, cu testare pe probleme cu polinoame trigonometrice. Am implementat în

Matlab, utilizând bibliotecile de programare semidefinită CVX și SeDuMi, programe care rezolvă probleme fundamentale de optimizare cu polinoame pozitive, atât pentru polinoame trigonometrice cât și pentru polinoame de variabilă reală. Până acum am reușit rezolvarea problemelor din capitolul 2 din [1], în care apar polinoame cu o singură variabilă. Pe parcursul lunii decembrie vom trece la polinoamele cu mai multe variabile, care constituie obiectul principal al acestui contract. Așa cum era de așteptat, CVX permite o implementare mai facilă, dar timpul de calcul necesar rezolvării este mai mare. Un scop secundar al acestui obiectiv a fost acomodarea doctoranzilor cu mediul de optimizare pe care îl vor folosi pe întreaga durată a proiectului.

- Obiectiv 2: studiu condițiilor de pozitivitate pentru polinoame hibride (mixte). Polinoamele hibride au cel puțin câte o variabilă complexă și una reală, fiind astfel o combinație între polinoamele trigonometrice și cele de variabilă reală. În această etapă, am dezvoltat o parametrizare a acestor polinoame care sunt sumă-de-pătrate, bazată pe utilizarea matricelor pozitiv definite. Am identificat câteva posibile aplicații, anume probleme de optimizare care pot fi aduse la forma specifică a programării semidefinite utilizând parametrizarea propusă (anume probleme de stabilitate, stabilitate robustă și proiectare filtrelor ajustabile). Sunt astfel create premisele trecerii la scrierea de programe și deci la faza experimentală a temei.
- Obiectiv suplimentar: calculul razei de controlabilitate. Raza de controlabilitate este o măsură a distanței de la un sistem dat la spațiul sistemelor necontrolabilă și este utilă în studiul robusteții proprietății de controlabilitate. Am utilizat o relaxare de tip sumă-de-pătrate, ca în [2], adăugând o modalitate de a crește precizia relaxării prin creșterea gradului polinoamelor implicate. Pentru implementare au fost utilizate bibliotecile SeDuMi și SDPT3. Programele funcționează bine pe exemplele disponibile, dar urmează să proiectăm teste speciale și să studiem probleme conexe.

Datorită timpului scurt (practic nici două luni), nu am ajuns la scrierea unei lucrări publicabile. Considerăm însă că există premise bune pentru a realiza aceasta în prima jumătate a anului viitor.

2 Rezultate obținute—detalii

2.1 Parametrizarea polinoamelor hibride

Pentru simplitate, discutăm cazul polinoamelor hibride real-trigonometric cu două variabile

$$R(t, z) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=-n_2}^{n_2} r_{k_1, k_2} t^{k_1} z^{-k_2}, \quad (1)$$

unde $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Coeficienții polinomului satisfac relația de simetrie

$$r_{k_1, -k_2} = r_{k_1, k_2}^*, \quad (2)$$

și astfel polinomul (1) ia valori reale pe $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, unde \mathbb{T} este cercul unitate. Studiem polinoame hibride de tip sumă-de-pătrate, care au forma

$$R(t, z) = \sum_{\ell=1}^{\nu} H_{\ell}(t, z) H_{\ell}^*(t, z^{-1}), \quad (3)$$

în care polinoamele $H_{\ell}(t, z)$ sunt cauzale în z . Notăm cu

$$\boldsymbol{\psi}_n(t) = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n]^T \quad (4)$$

baza canonică pentru polinoame de gradul n și cu

$$\boldsymbol{\psi}(t, z) = \boldsymbol{\psi}_{n_2}(z) \otimes \boldsymbol{\psi}_{n_1}(t) \quad (5)$$

baza pentru polinoame hibride în două variabile. Un polinom hibrid cauzal poate fi scris în forma

$$H(t, z) = \boldsymbol{\psi}^T(t, z^{-1}) \mathbf{h}, \quad (6)$$

unde $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$ conține coeficienții lui $H(t, z)$, ordonați corespunzător bazei (5).

O matrice hermitiană \mathbf{Q} este numită matrice *Gram* asociată polinomului hibrid (1) dacă

$$R(t, z) = \boldsymbol{\psi}^T(t, z^{-1}) \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\psi}(t, z). \quad (7)$$

Rezultatul teoretic de bază obținut este următorul.

Teorema 1 *Relația dintre coeficienții polinomului hibrid $R(t, z)$ și elementele matricei \mathbf{Q} este*

$$r_{k_1, k_2} = \text{trace}[(\boldsymbol{\Theta}_{k_2} \otimes \boldsymbol{\Upsilon}_{k_1}) \cdot \mathbf{Q}], \quad (8)$$

unde $\boldsymbol{\Theta}_{k_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ este matricea *Toeplitz* elementară cu 1 pe diagonală k_2 și 0 în rest, iar $\boldsymbol{\Upsilon}_{k_1} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ este matricea *Hankel* elementară cu 1 pe diagonală k_1 și 0 în rest.

Un polinom hibrid (1) este sumă-de-pătrate dacă și numai dacă există o matrice pozitiv semidefinită $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ astfel încât relația (7) să aibă loc.

Alte rezultate se referă la pozitivitatea polinoamelor hibride pe domenii mărginite (descrise de pozitivitatea unor polinoame date). De exemplu, un polinom (1) este pozitiv pentru $t \in [a, b]$, $z \in \mathbb{T}$, dacă și numai dacă există sume-de-pătrate $S_0(t, z)$, $S_1(t, z)$ astfel încât

$$R(t, z) = S_0(t, z) + (t - a)(b - t)S_1(t, z). \quad (9)$$

Ilustrăm utilizarea teoremei cu un exemplu de testare a stabilității robuste (pentru alte aplicații posibile, vezi materialul complet de pe site). Considerăm sistemul discret (1D) a cărui funcție de transfer are numitorul

$$A(\tau, z) = \sum_{k=0}^n a_k(\tau) z^{-k}, \quad (10)$$

unde $a_k(\tau)$ sunt polinoame în parametrul $\tau \in [0, 1]$ (dacă intervalul este diferit, poate fi redus trivial la $[0, 1]$). Dorim să verificăm dacă polinomul este Schur pentru toate valorile admisibile ale parametrului, i.e. $A(\tau, z) \neq 0$, $\forall |z| \leq 1$, $\forall \tau \in [0, 1]$. Putem transforma această cerință într-una de pozitivitate, anume ca polinomul hibrid $R(\tau, z) = A(\tau, z)A(\tau, z^{-1})$ să fie pozitiv. Implementarea se poate face utilizând relația (9) pentru $R(\tau, z)$, și parametrizând sumele-de-pătrate ca în teorema de mai sus.

Rezultatele de mai sus pot fi generalizate pentru polinoame hibride cu mai mult de două variabile.

2.2 Calculul razei de controlabilitate

Fie un sistem liniar descris de $\dot{x} = Ax + Bu$. Raza de controlabilitate este norma celei mai mici perturbații a perechii (A, B) care face sistemul necontrolabil, i.e.

$$\begin{aligned} \mu(A, B) &= \inf_{\delta A, \delta B} \|\delta A \ \delta B\| \\ \text{s.t.} \quad &(B + \delta A, B + \delta B) \text{ este necontrolabila} \end{aligned} \quad (11)$$

O definiție echivalentă este

$$\mu(A, B) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min}([\lambda I - A \ B]), \quad (12)$$

unde $\sigma_{\min}(\cdot)$ este cea mică valoare singulară a matricei argument. Calculul razei de controlabilitate poate fi transformat într-o problemă de pozitivitate, constând în calculul valorii proprii minime a polinomului

$$P(\lambda) = |\lambda|^2 - \lambda A^H - \bar{\lambda} A + AA^H + BB^H. \quad (13)$$

Punând în (13) $\lambda = x + jy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, raza de controlabilitate este valoare maximă τ pentru care

$$P(x, y) = AA^H + BB^H + (-A - A^H)x + (jA - jA^H)y + (x^2 + y^2)I \geq \tau I \quad (14)$$

Pentru implementare, condiția de mai sus este relaxată la cerința ca $P(x, y) - \tau I$ să fie sumă-de-pătrate. Valoarea τ obținută prin rezolvarea problemei de programare semidefinită echivalente este o margine inferioară (de obicei de bună calitate) a razei de controlabilitate.

O margine mai exactă poate fi obținută utilizând un rezultat recent asupra polinoamelor matriceale pozitive, anume că putem scrie că $P(x, y) -$

τI este pozitiv dacă și numai dacă există sume-de-pătrate $S_0(x, y)$, $S_1(x, y)$ astfel încât

$$P(x, y) - \tau I = S_0(x, y) + (r^2 - x^2 - y^2)S_1(x, y), \quad (15)$$

unde r este o margine superioară pentru $\mu(A, B)$ (care se poate calcula în mai multe feluri). Am implementat rezolvarea problemei de optimizare bazată pe (15) și am obținut rezultate promițătoare.

În continuare vom studia implementarea (14) utilizând polinoame trigonometrice și eventual polinoame hibride.

3 Concluzii

Considerăm că rezultatele obținute în perioada scursă de la 1 octombrie 2007 oferă o bază bună pentru continuarea cercetării și finalizarea ei cu articole publicabile în reviste de calitate. În plus, un prim obiectiv nescris în contract a fost în bună măsură atins: perioada de rodaj pare depășită și echipa de cercetare a devenit funcțională.

Bibliografie

- [1] B. Dumitrescu. *Positive trigonometric polynomials and signal processing applications*. Springer, 2007.
- [2] Y. Hachez and R. Ștefan. Computing the Distance to Uncontrollability: a Convex Optimization Approach. In *CAO*, 2006.