PROIECT: Pozitivitatea în analiza şi sinteza sistemelor multidimensionale

– Sinteza rezultatelor obţinute în 2008 –

Contract IDEI 309/2007, cod ID_1033
Nr.intern: AU-12-08-01

Director de proiect: prof.dr.ing. Bogdan Dumitrescu

Catedra Automatică şi Ingineria Sistemelor
Facultatea Automatică şi Calculatoare
Universitatea POLITEHNICA Bucureşti

15 octombrie 2008

1 Obiectivele etapei şi descrierea sumară a rezultatelor

Etapa 2008 a proiectului a avut ca scop atingerea primelor obiective tangibile ale echipei de cercetare. Este vorba de elaborarea primelor articole ştiinţifice şi producerea primei forme utilizabile a bibliotecii de programe dedicată operării cu polinoame trigonometrice pozitive. În prima parte a acestui raport expunem pe scurt activităţile semnificative pe anul 2008, iar în partea a doua prezentăm un rezumat al rezultatelor ştiinţifice.

1.1 Lucrări publicate sau trimise spre publicare

Lista lucrărilor realizate în 2008 este prezentată mai jos. Lucrările [L1] şi [L2] sunt articole pentru reviste cotate ISI (cu factor de impact mai mare ca 1, ceea ce pentru domeniul nostru este foarte bine). [L1] a fost deja acceptată, ceea ce asigură îndeplinirea obiectivului de publicare pe 2008.

Celelalte lucrări sunt articole de conferinţă, cu menţiunea că MTNS şi ICASSP sunt conferinţe cu tradiţie şi prestigiu. De exemplu, articolele acceptate la ICASSP apar în baza de date IEEE şi sunt indexate de Scopus.

[L1] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Computing the Controllability Radius: a Semidefinite Programming Approach, IET Control Theory and Applications, acceptat Sept. 2008.

[L2] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Positive hybrid real-trigonometric polynomials: theory and applications, trimis la IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Oct. 2008.

[L3] B.Dumitrescu, R.Ştefan – Positive hybrid real-trigonometric polynomials and applications, Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems, Blacksburg, Virginia, Iulie 2008.

[L4] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Minimax Design of Adjustable FIR Filters Using 2D Polynomial Methods, Int. Conf. Acoustics Speech and Signal Processing 2009, trimis Sept. 2008.

1.2 Utilizarea fondurilor

Bugetul pe 2008 a fost consumat pentru urmatoarele tipuri de cheltuieli (vezi separat bugetul detaliat)

- Salarii pentru membrii echipei.
- Regia aferentă.
- Achiziţionarea de calculatoare, o imprimanta, diverse componente şi consumabile, precum şi a programului Matlab, esenţial pentru implementarea rezultatelor ştiinţifice.

- Deplasări (în ordine cronologică): Adela Defta la Tampere University of Technology, Finlanda (TUT) (1 lună), Bogdan Dumitrescu la TUT (2 săptămâni), Radu Ştefan la Virginia Tech, SUA (2 săptămâni), Bogdan Şicleru la TUT (3 luni, deplasare în curs de desfăşurare). Frecvenţa mare a deplasărilor la TUT se explică prin relaţiile de colaborare pe care directorul proiectului le are acolo.

  De asemenea, în mai 2008 a vizitat Universitatea Politehnica dr. Robert Bregović de la TUT. El a purtat discuţii ştiinţifice cu membrii echipei şi a ţinut un curs la şcoala de vară desfăşurată la Facultatea de Automatică şi Calculatoare.

1.3 Acţiuni administrative

- După un an de lucru la proiect, drd. Adela Defta a plecat din ţară şi implicit a părăsit proiectul. Pentru completarea echipei a fost cooptat Bogdan Şicleru, absolvent al Facultăţi de Automatică şi doctorand din octombrie 2008. Bogdan Şicleru a lucrat efectiv pe tema proiectului încă de la începutul anului 2008. Colaborarea a fost extrem de fructuoasă, după cum se vede din lista publicaţiilor realizate în 2008.

- Întreţinerea paginii web a proiectului, la adresa `http://www.schur.pub.ro/Idei2007.htm`, unde pot fi găsite manuscrisele lucrărilor publicate sau trimise spre publicare, precum şi programele realizate până acum.

1.4 Îndeplinirea obiectivelor

Pentru anul 2008, în Anexa IIA au fost prevăzute cinci obiective. Descriem mai jos modul în care ele au fost îndeplinite şi rezultatele obţinute, în ordinea importanţei ştiinţifice a obiectivelor.

- Obiectiv 2: Studiu aplicaţii polinoame pozitive mixte şi rază de controlabilitate. Acesta a fost obiectivul prioritar, datorită potenţialului de publicare şi rezultatelor obţinute încă de la începutul cercetării. Calculul razei de controlabilitate a fost subiectul lucrării [L1]. Polinoamele pozitive mixte (sau hibride) şi parametrizarea lor cu ajutorul matricelor pozitiv semidefinite au constituit baza teoretice a lucrărilor [L2], [L3] şi [L4]. Nu este exclus ca ele să fie utilizate şi în aplicaţii viitoare.

- Obiectiv 5: Studiu lema KYP pentru sisteme 2D, alte conditii de pozitivitate si aplicatii. Deşi nu am reuşit nici o inovaţie în descrierea lemei KYP, studiul sistemelor 2D a fost util în proiectarea filtrelor FIR ajustabile, văzute ca sisteme 2D in [L4] (unde constituie subiectul principal) şi [L2] (unde furnizează o aplicaţie).

- Obiectivele 1 şi 4: bibliotecă pentru probleme de optimizare cu polinoame trigonometrice. Am finalizat componenta unidimensională a bibliotecii şi am reuşit specificarea completă a modului de operare. Modulele pentru lucrul cu polinoame cu mai multe variabile sunt în diverse stadii de realizare şi ne aşteptăm ca până la sfârşitul anului să avem prima versiune completă a bibliotecii. Întârzierile au fost datorate luării în consideraţie şi a polinoamelor mixte (neincluse iniţial în plan) şi părăsirii echipei de către Adela Defta.
- Obiectiv 3: achiziţii infrastructură. Planul de achiziţii a fost îndeplinit complet.

2 Rezultate ştiinţifice—rezumat

2.1 Calculul razei de controlabilitate

Prezentăm aici un rezumat al ideilor din [L1].

Fie un sistem liniar descris de $\dot{x} = Ax + Bu$. Raza de controlabilitate este norma celei mai mici perturbaţii a perechii (A, B) care face sistemul necontrolabil, i.e.

$$\begin{aligned} \mu(A,B) \quad = \quad & \inf_{\delta A, \delta B} \quad \|\delta A \ \delta B\| \\ & \text{s.t.} \quad (B+\delta A, B+\delta B) \text{ este necontrolabila} \end{aligned} \tag{1}$$

O definiţie echivalentă este

$$\mu(A,B) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min}([\lambda I - A \ B]), \tag{2}$$

unde $\sigma_{\min}(\cdot)$ este cea mică valoare singulară a matricei argument. Calculul razei de controlabilitate poate fi transformat într-o problemă de pozitivitate, constând în calculul valorii proprii minime a polinomului

$$P(\lambda) = |\lambda|^2 - \lambda A^H - \bar{\lambda} A + AA^H + BB^H. \tag{3}$$

Această problemă poate fi rezolvată în două feluri.

O primă soluţie este să punem $\lambda = x + jy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$ în (3), şi astfel raza de controlabilitate este valoare maximă τ pentru care

$$P(x,y) = AA^H + BB^H + (-A - A^H)x + (jA - jA^H)y + (x^2+y^2)I \geq \tau I. \tag{4}$$

Pentru implementare, condiţia de mai sus este relaxată la cerinţa ca $P(x, y) - \tau I$ să fie sumă-de-pătrate. Valoarea τ obţinută prin rezolvarea problemei de programare semidefinită echivalente este o margine inferioară (de obicei de bună calitate) a razei de controlabilitate.

O a doua soluţie este să scriem $\lambda = re^{j\omega}$, cu $r \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Se pot calcula uşor margini r_1 şi r_2 astfel încât soluţia să satisfacă $r_1 \leq r \leq r_2$. Pentru a transforma (3) într-un polinom trigonometric, introducem variabilele $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = 1$, definite prin

$$z_1 = e^{j\omega}, \quad r = r_1 + (r_2 - r_1)[1/2 + (z_2 + z_2^{-1})/4]. \tag{5}$$

Substituind în (3) se obţine un polinom $P(z_1, z_2))$ iar raza de controlabilitate se calculează aflând valoarea maximă a lui τ pentru care $P(z_1, z_2) - \tau I$ este sumă-de-pătrate (trigonometrice).

Am implementat cele două metode în Matlab, cu ajutorul bibliotecii de programare semidefinită (SDP) SeDuMi [3]. Pe un număr mare de sisteme de test, programele noastre au dat rezultate bune în termeni de complexitate şi precizie, prin comparaţie cu metodele considerate cele mai precise în momentul de faţă [1, 2].

Utilizând rezultate privind pozitivitatea pe domenii a polinoamelor, am obţinut algoritmi SDP pentru calculul *razei de stabilizabilitate*.

În fine, am propus şi o metodă de calcul al razei de controlabilitate *structurate*, rezolvând următoarea problemă. Presupunem că matricea $\boldsymbol{A}$ este înlocuită cu $\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{D}$, unde matricele $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{D}$ sunt date iar $\alpha \in [-1, 1]$ este un parametru a cărui valoare nu e cunoscută. Dorim calculul valorii celei mai mici a razei de controlabilitate a sistemului, pentru toate valorile posibile ale parametrului α. Altfel spus, dorim să află care este "cea mai puţin controlabilă pereche" a familiei $(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B})$. Problema de optimizare este

$$\rho_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in [-1,1]} \sigma_{min}([\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{D} - \lambda\boldsymbol{I} \ \ \boldsymbol{B}]). \tag{6}$$

Această problemă poate fi rezolvată prin transformarea ei într-una polinomială, de tip sumă-de-pătrate (cu trei variabile). Problema (6) nu poate fi rezolvată cu extensii imediate ale metodelor din [1, 2].

2.2 Parametrizarea polinoamelor hibride

Această secţiune este dedicată rezumării componentei teoretice a lucrărilor [L2,L3]. Deşi rezultatele pot fi generalizate pentru polinoame hibride cu orice număr de variabile, pentru simplitate, discutăm cazul polinoamelor hibride real-trigonometric cu două variabile

$$R(t, z) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=-n_2}^{n_2} r_{k_1,k_2} t^{k_1} z^{-k_2}, \tag{7}$$

unde $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Coeficienţii polinomului satisfac relaţia de simetrie

$$r_{k_1,-k_2} = r^*_{k_1,k_2}, \tag{8}$$

şi astfel polinomul (7) ia valori reale pe $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, unde $\mathbb{T}$ este cercul unitate. Studiem polinoame hibride de tip sumă-de-pătrate, care au forma

$$R(t, z) = \sum_{\ell=1}^{\nu} H_\ell(t, z) H^*_\ell(t, z^{-1}), \tag{9}$$

în care polinoamele $H_\ell(t,z)$ sunt cauzale în z. Notăm cu

$$\boldsymbol{\psi}_n(t) = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n]^T \tag{10}$$

baza canonică pentru polinoame de gradul n şi cu

$$\boldsymbol{\psi}(t,z) = \boldsymbol{\psi}_{n_2}(z) \otimes \boldsymbol{\psi}_{n_1}(t) \tag{11}$$

baza pentru polinoame hibride în două variabile. Un polinom hibrid cauzal poate fi scris în forma

$$H(t,z) = \boldsymbol{\psi}^T(t,z^{-1})\boldsymbol{h}, \tag{12}$$

unde $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^N$ conţine coeficienţii lui $H(t,z)$, ordonaţi corespunzător bazei (11).

O matrice hermitiană $\boldsymbol{Q}$ este numită matrice *Gram* asociată polinomului hibrid (7) dacă

$$R(t,z) = \boldsymbol{\psi}^T(t,z^{-1}) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\psi}(t,z). \tag{13}$$

Rezultatul teoretic de bază obţinut este următorul.

Teorema 1 *Relaţia dintre coeficienţii polinomului hibrid $R(t,z)$ şi elementele matricei $\boldsymbol{Q}$ este*

$$r_{k_1,k_2} = trace[(\boldsymbol{\Theta}_{k_2} \otimes \boldsymbol{\Upsilon}_{k_1}) \cdot \boldsymbol{Q}], \tag{14}$$

unde $\boldsymbol{\Theta}_{k_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ este matricea Toeplitz elementară cu 1 pe diagonala k_2 şi 0 în rest, iar $\boldsymbol{\Upsilon}_{k_1} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ este matricea Hankel elementară cu 1 pe diagonala k_1 şi 0 în rest.

Un polinom hibrid (7) este sumă-de-pătrate dacă şi numai dacă există o matrice pozitiv semidefinită $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ astfel încât relaţia (13) să aibă loc.

O alta categorie de rezultate priveşte polinoamele care sunt pozitive pe domenii descrise de pozitivitatea unor polinoame date, care au forma

$$\mathcal{D} = \{(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \mid D_\ell(t,z) \geq 0, \ \ell = 1:L\}, \tag{15}$$

unde $D_\ell(t,z)$ sunt polinoame hibride definite ca în (7). Presupunem că mulţimea $\mathcal{D}$ este mărginită şi deci avem $\mathcal{D} \subset [a,b] \times \mathbb{T}$ pentru nişte constante a, b. De asemenea, presupunem ca

$$D_L(t,z) = (t-a)(b-t) \tag{16}$$

se află printre polinoamele care definesc (15). Practic, dacă nu are direct acest rol, polinom (16) poate fi adăugat explicit celor care definesc (15), deci aceasta nu este o restricţie semnficativă.

Teorema 2 *Dacă un polinom (7) este pozitiv pe domeniul $\mathcal{D}$, i.e. $R(t,z) > 0$, $\forall (t,z) \in \mathcal{D}$, atunci există sume-de-pătrate $S_\ell(t,z)$, $\ell = 0:L$, astfel încât*

$$R(t,z) = S_0(t,z) + \sum_{\ell=1}^{L} D_\ell(t,z) \cdot S_\ell(t,z). \tag{17}$$

Dacă polinoamele $R(t,z)$ şi $D_\ell(t,z)$ au coeficienţi reali, atunci şi sumele-de-pătrate $S_\ell(t,z)$ au coeficienţi reali. ■

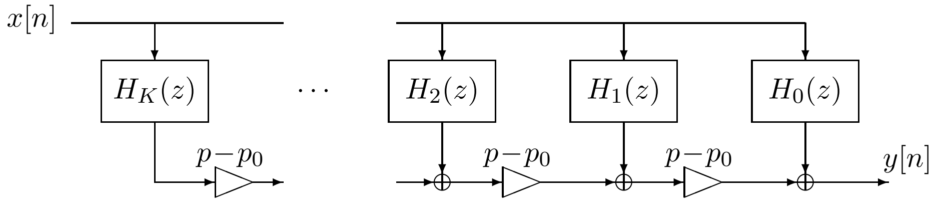

Figura 1: Structură Farrowpentru implementarea filtrelor ajustabile.

Rezultatele de mai sus pot fi folosite pentru rezolvarea unor probleme din automatică şi prelucrarea semnalelor. Dăm un singur exemplu, referitor la stabilitatea absolută a sistemelor cu întârziere, în condiţiile în care întârzierea este necunoscută. Fie sistemul (în buclă închisă)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + \phi(y(t)) \\ y(t) &= x(t) + cx(t-\tau) \end{aligned} \tag{18}$$

unde $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, iar ϕ este o neliniaritate de tip sector, $0 \leq \dfrac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k \leq \infty$. Folosind criteriul de stabilitate absolută al lui Popov şi proprietăţi privind pozitivitatea polinoamelor hibride, putem de exemplu testa dacă sistemul (18) este stabil, pentru k dat şi *orice* valoare a întârzierii τ. De asemenea, putem estima valoarea maximă a lui k pentru care sistemul este stabil. Folosind rezultate din [4], putem extinde rezolvarea acestor probleme pentru cazul în care întârzierea ia valori într-un interval $[0, \tilde{\tau}]$, cu $\tilde{\tau}$ dat.

2.3 Proiectarea filtrelor FIR variabile

Expunem pe scurt rezultatele din [L4], referitoare la filtre ajustabile de forma

$$H(p,z) = \sum_{k=0}^{K} (p-p_0)^k H_k(z), \tag{19}$$

unde $H_k(z)$, $k = 0 : K$, sunt filtre FIR cu fază liniară, $p_0 \in \mathbb{R}$ este o constantă, iar $p \in \mathbb{R}$ este variabil. Implementarea filtrelor ajustabile (19) se face cu structura Farrow din figura 1.

O problemă tipică de proiectarea în sens minimax este următoarea. Parametrul p ia valori într-un interval dat $[p_l, p_u]$. Banda de trecere a filtrului ajustabil este $[0, p-\Delta]$, unde Δ este o constantă. Banda de oprire a fitrului este $[p+\Delta, \pi]$, deci banda de tranziţie are o lăţime constantă egală cu 2Δ. Fie γ_p eroarea maximă admisibilă în banda de trecere. Dorim minimizarea erorii maxime γ_s în banda de oprire. Se obţine problema de optimizare

$$\begin{array}{ll} \min & \gamma_s \\ \text{s.t.} & 1-\gamma_p \leq H(p, e^{j\omega}) \leq 1+\gamma_p, \ \forall \omega \in [0, p-\Delta] \\ & -\gamma_s \leq H(p, e^{j\omega}) \leq \gamma_s, \ \forall \omega \in [p+\Delta, \pi] \end{array} \tag{20}$$

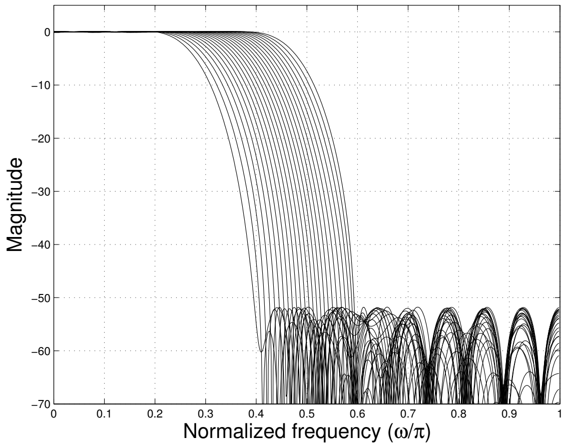

Figura 2: Răspunsuri în frecvenţă ale familiei de filtre de ordin 26, rezultată prin rezolvarea problemei (20), cu $K = 4$, $\Delta = 0.2\pi$, $\gamma_p = 0.01$, pentru 25 de valori ale parametrului $p \in [0.3\pi, 0.5\pi]$.

Această problemă poate fi rezolvată cu ajutorul polinoamelor 2D trigonometrice pozitive. O variantă modificată a problemei permite utilizarea polinoamelor hibride. Prezentăm doar un rezultat tipic, în figura 2.

3 Concluzii

Am îndeplinit obiectivul principal, acela de a publica un articol într-o revistă cotată ISI. De asemenea, am reusit scrierea mai multor articole, aflate în diverse stadii de publicare. Considerăm că ne aflăm într-o poziţie bună pentru continuarea cercetării cu rezultate similare celor din 2008.

Bibliografie

[1] M. Gu. New Methods for Estimating the Distance to Uncontrollability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21(3):989–1003, 2000.

[2] M. Gu, E. Mengi, M.L. Overton, J. Xia, and J. Zhu. Fast Methods for Estimating the Distance to Uncontrollability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 28(2):477–502, 2006.

[3] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. *Optimization Methods and Software*, 11:625–653, 1999. http://sedumi.mcmaster.ca.

[4] J. Zhang, C.R. Knospe, and P. Tsiotras. New results for the analysis of linear systems with time-invariant delays. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13:1149–1175, 2003.