PROIECT: Pozitivitatea în analiza şi sinteza sistemelor multidimensionale

– Sinteza rezultatelor obţinute în 2009 –

Contract IDEI 309/2007, cod ID_1033
Nr.intern: AU-12-09-01

Director de proiect: prof.dr.ing. Bogdan Dumitrescu

Catedra Automatică şi Ingineria Sistemelor
Facultatea Automatică şi Calculatoare
Universitatea POLITEHNICA Bucureşti

2 septembrie 2009

1 Obiectivele etapei şi descrierea sumară a rezultatelor

Etapa 2009 a proiectului a avut două obiective ştiinţifice:

1. studiul stabilităţii robuste a sistemelor multidimensionale,
2. studiul bancurilor de filtre multidimensionale.

Cercetarea a avut scopul de a descoperi algoritmi noi pentru problemele studiate şi de a scrie lucrări ştiinţifice în care aceştia sunt descrişi împreună cu fundamentarea lor teoretică şi validarea experimentală. În prima parte a acestui raport expunem pe scurt activităţile semnificative pe anul 2009, iar în partea a doua prezentăm un rezumat al rezultatelor ştiinţifice.

1.1 Lucrări publicate sau trimise spre publicare

Lucrările finalizate în 2009 sunt următoarele:

[L1] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Positive hybrid real-trigonometric polynomials and applications to adjustable filter design and absolute stability analysis, Circuits, Systems and Signal Processing, acceptat Aug. 2009.

[L2] B.Dumitrescu – A Moulding Technique for the Design of 2-D Orthogonal Filter Banks, trimis la IEEE Signal Processing Letters, Sept. 2009.

[L3] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Delay-dependent stability analysis of neutral systems using positive polynomials optimization, IFAC Worshop Control Appl. of Optimization, Jyvaskyla, Finland, May 2009.

[L4] B.C.Şicleru, B.Dumitrescu – SeDuMi Pol—a Preprocessor for Optimization with Positive Polynomials, Proc. 17th Int. Conf. on Control Systems and Computer Science, Bucharest, Romania, vol.1, pp.483-488, May 2009.

Lucrările [L1] şi [L2] sunt articole în reviste cotate ISI. [L1] a fost deja acceptată, ceea ce asigură îndeplinirea obiectivului de publicare pe 2009. Menţionăm că [L1] a fost începută în etapa 2008, dar completată şi revizuită în etapa curentă. Lucrările [L3] şi [L4] sunt articole de conferinţă.

Precizăm că lucrările următoare, raportate în 2008, au apărut [L5] sau au fost acceptate şi susţinute la conferinţă [L6]. Prin urmare, toate articolele raportate în 2008 au apărut.

[L5] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Computing the Controllability Radius: a Semidefinite Programming Approach, IET Control Theory and Applications, vol.3, no.6, pp.654-660, June 2009.

[L6] B.Dumitrescu, B.C.Şicleru, R.Ştefan – Minimax Design of Adjustable FIR Filters Using 2D Polynomial Methods, Int. Conf. Acoustics Speech and Signal Processing, Taipei, Taiwan, April 2009.

1.2 Utilizarea fondurilor

Bugetul pe 2009 a fost consumat pentru urmatoarele tipuri de cheltuieli (vezi separat bugetul detaliat)

- Salarii pentru membrii echipei.
- Regia aferentă.
- Deplasări: Bogdan Dumitrescu la Taiwan National University şi conferinţa ICASSP, Taipei, Taiwan (1 săptămână) şi la Tampere University of Technology, Finlanda (TUT) (2 săptămâni), Bogdan Şicleru la TUT (4 luni, deplasare în curs de desfăşurare).

Reducerea bugetului din martie 2009 a fost realizată prin diminuarea salariilor membrilor seniori ai echipei şi prin renunţarea la achiziţii materiale. Bugetul de deplasări a fost nemodificat, datorită faptului că în martie deplasările erau deja organizate. In particular, deplasarea la conferinţa ICASSP era practic imposibil de anulat, plata taxei de participare, a biletului de avion şi (parţial) a hotelului fiind deja efectuate.

1.3 Acţiuni administrative

- Întreţinerea paginii web a proiectului, la adresa `http://www.schur.pub.ro/Idei2007.htm`, unde pot fi găsite manuscrisele lucrărilor publicate sau trimise spre publicare, precum şi programele realizate până acum. Pagina conţine şi documentele de predare a fazelor anterioare.
- Nu au fost schimbări în componenţa echipei de cercetare. Bogdan Şicleru a finalizat examenele de doctorat.

1.4 Îndeplinirea obiectivelor

Descriem mai jos modul în care cele două obiective au fost îndeplinite şi rezultatele obţinute.

- Obiectiv 1: Studiul stabilităţii robuste a sistemelor multidimensionale. În cadrul acestui obiectiv, am studiat stabilitatea sistemelor dinamice cu întârziere, în condiţii de robusteţe la valoarea întârzierii, care poate avea o valoare arbitrară aparţinând unui interval dat. Lucrarea [L3] este dedicată integral acestui subiect, cu particularizare la sistemele neutrale, iar lucrarea [L1] conţine o secţiune pe aceasta temă.
- Obiectiv 2: Studiul bancurilor de filtre multidimensionale. Lucrarea [L2] este rezultatul principal al acestui studiu, propunând un algoritm nou pentru proiectarea bancurilor de filtre 2-D ortogonale. De asemenea, lucrăm la un alt tip de algoritm, cu aplicaţie la bancurile de filtre 3-D, primele rezultate fiind promiţătoare; există premizele de a realiza încă o lucrare în această toamnă.

Am continuat lucrul la completarea bibliotecii de programe pentru optimizarea cu polinoame pozitive, rezultatele fiind comunicate în lucrarea [L4].

2 Rezultate ştiinţifice—rezumat

Cele două secţiuni de mai jos ilustrează rezultatele cercetării la obiectivele din 2009 ale proiectului.

2.1 Stabilitatea robustă a sistemelor neutrale

Prezentăm aici un rezumat al ideilor din [L3].

Considerăm un sistem neutral cu o singură întârziere (cazul cu mai multe întârzieri se tratează similar)

$$\dot{x}(t) - B\dot{x}(t-\tau) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau), \tag{1}$$

unde A_0, A_1 şi B sunt matrice $n \times n$. Presupunem că sistemul este stabil pentru $\tau = 0$, deci B este o matrice Schur şi $(I-B)^{-1}(A_0 + A_1)$ este Hurwitz. Dându-se $\overline{\tau} > 0$, se doreşte un test prin care să se verifice stabilitatea sistemului (1) pentru orice $\tau \in [0, \overline{\tau}]$. In particular, se doreşte aflarea valorii maxime a lui $\overline{\tau}$ pentru care sistemul este stabil $\forall \tau \in [0, \overline{\tau}]$.

Notând

$$G_\tau(s) = s\left(I - Be^{-s\tau}\right) - A_0 - A_1 e^{-s\tau}, \tag{2}$$

se poate demonstra [1] că sistemul (1) este stabil dacă

$$\det G_\tau(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \geq 0, \ \forall \tau \in [0, \overline{\tau}]. \tag{3}$$

Pentru a transforma condiţia (3) într-una polinomială, deci tratabilă, apelăm la un rezultat din [4]. Fie

$$R_m(s) = \frac{D_m(s)}{D_m(-s)} \tag{4}$$

aproximarea Padé a elementului de întârziere $e^{-\tau s}$, cu

$$D_m(s) = \sum_{k=0}^{m} c_k s^k, \ c_k = (-1)^k \frac{(2m-k)!m!}{(2m)!k!(m-k)!}.$$

Introducem următoarele mulţimi

$$\Omega_d(\omega, \overline{\tau}) = \left\{e^{-j\omega\tau} \mid \tau \in [0, \overline{\tau}]\right\},$$

$$\Omega_o(\omega, \overline{\tau}) = \left\{R_m(j\omega\alpha_m\tau) \mid \tau \in [0, \overline{\tau}]\right\},$$

$$\Omega_i(\omega, \overline{\tau}) = \left\{R_m(j\omega\tau) \mid \tau \in [0, \overline{\tau}]\right\}$$

unde $\alpha_m = \dfrac{\omega_{cm}}{2\pi}$ iar ω_{cm} este cea mai mică frecvenţă pozitivă în care faza are valoarea -2π, i.e. $\omega_{cm} = \min\{\omega > 0 \mid R_m(j\omega) = 1\}$. Următoarele proprietăţi au fost demonstrate în [4]:

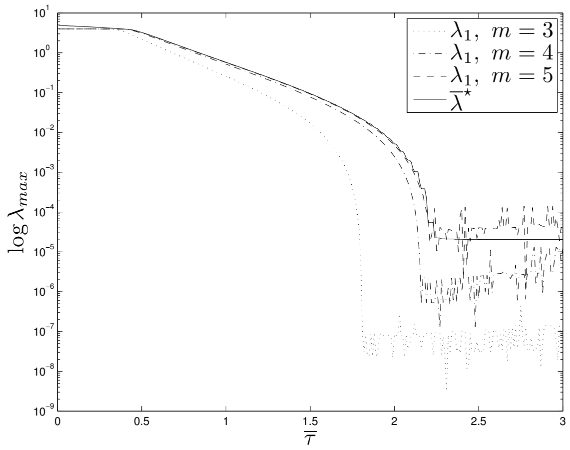

Figura 1: Valori $\lambda^\star$ obţinute pe o problemă test.

1. $R_m(s)$ are toţi polii în semiplanul complex stâng.

2. Pentru orice $\overline{\tau} > 0$ şi orice $\omega > 0$, au loc incluziunile $\Omega_i(\omega,\overline{\tau}) \subseteq \Omega_d(\omega,\overline{\tau}) \subseteq \Omega_o(\omega,\overline{\tau})$ şi egalitatea $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 1$.

Condiţia (3) poate fi testată prin rezolvarea problemei

$$\begin{array}{rcll} \lambda^\star & = & \max & \lambda \\ & & \text{s.t.} & G_\tau(j\omega)G_\tau(j\omega)^H \succeq \lambda I \\ & & & \forall\omega \geq 0,\ \forall\tau \in [0,\overline{\tau}] \end{array} \tag{5}$$

Dacă $\lambda^\star$ este pozitiv, decidem că sistemul (1) este stabil. Daca $\lambda^\star$ este (numeric egal cu) zero, decidem că sistemul este instabil.

Înlocuind $e^{-j\omega\tau}$ cu $R_m(j\alpha_m\omega\tau)$ în $G_\tau(j\omega)$ restricţia problemei de optimizare (5) devine o inegalitate polinomială, care poate fi implementată prin condiţii implicând polinoame sumă-de-pătrate şi deci transformând (5) într-o problemă de programare semidefinită. Detaliile pot fi găsite în [L3].

Desigur, în acest fel, obţinem doar o condiţie suficientă de stabilitate. Totuşi, pentru grade m relativ mici ale aproximării Padé se obţin valori maxime $\overline{\tau}$ foarte apropiate de adevărata valoare maximă. Un exemplu de valori $\lambda^\star$ obţinute pentru diverse valori $\overline{\tau}$ şi m este prezentat în Figura 1. Se observă că $m = 5$ oferă o aproximare ce permite decizii de stabilitate corecte cu relativ bună precizie. O direcţie de cercetare ulterioară este studiul modalităţii de îmbunătăţire a calităţii rezultatelor numerice.

2.2 Proiectarea bancurilor de filtre 2-D ortogonale

Prezentăm aici un rezumat al ideilor din [L2].

Figura 2 prezintă structura generală a unui banc de filtre ortogonal cu două canale. Notăm $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ şi $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2}$, pentru $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Bancul este

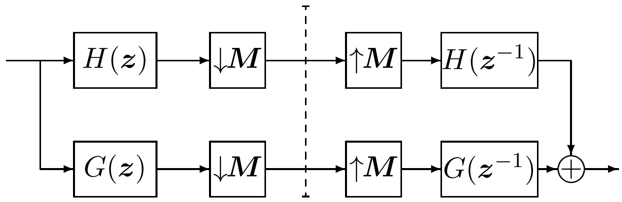

Figura 2: Banc de filtre ortogonal cu două canale.

complet determinat de filtrul de analiză de pe primul canal

$$H(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} h_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{k}} = [1 \ z_1^{-1} \ \ldots z_1^{-n_1}] \cdot \boldsymbol{H} \cdot [1 \ z_2^{-1} \ \ldots z_2^{-n_2}]^T, \tag{6}$$

unde $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{(n_1+1)\times(n_2+1)}$ este matricea coeficienţilor. Al doilea filtru de analiză este $G(\boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{m}} H(-\boldsymbol{z}^{-1})$, unde $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2$ va fi definit ulterior. Eşantionarea 2-D se face cu matricea (de tip quincunx)

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Componentele polifază ale filtrului $H(\boldsymbol{z})$ rezultă din

$$H(\boldsymbol{z}) = H_0(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{M}}) + z_1^{-1} H_1(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{M}}), \tag{8}$$

unde $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{M}} = (z_1 z_2, z_1 z_2^{-1})$. Matricea polifază a bancului de filtre este

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} H_0(\boldsymbol{z}) & H_1(\boldsymbol{z}) \\ \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{m}} H_1(\boldsymbol{z}^{-1}) & -\boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{m}} H_0(\boldsymbol{z}^{-1}) \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{i}}, \tag{9}$$

cu $\boldsymbol{m}$ ales astfel încât $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{z})$ să fie cauzal; gradul lui $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$ este $\boldsymbol{p}$ şi coeficienţii matriceali $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}$ au dimensiune 2×2. Intr-un banc de filtre ortogonal, matricea polifază este paraunitară, adică

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{z}^{-1}) = \boldsymbol{I}. \tag{10}$$

Această proprietate asigură reconstrucţia perfectă (semnalul de ieşire este o versiune întârziată a semnalului de intrare).

De obicei, bancurile de filtre trebuie să satisfacă şi condiţii de regularitate. Spunem că $H(\boldsymbol{z})$ are regularitate de ordin L dacă

$$\left. \frac{\partial^{\ell_1+\ell_2} H(\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_1^{\ell_1} \partial \omega_2^{\ell_2}} \right|_{\omega_1=\omega_2=\pi} = 0, \quad \forall \ell_1, \ell_2 \geq 0, \ \ell_1 + \ell_2 \leq L-1.$$

Această condiţie este echivalentă cu

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} (-1)^{k_1+k_2} k_1^{\ell_1} k_2^{\ell_2} h_{k_1,k_2} = 0. \tag{11}$$

Ne propunem să proiectăm un filtru $H(\boldsymbol{z})$ cu faza aproximativ liniară, deoarece această proprietate este benefică în tratamentul imaginilor. Fie

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\omega} \in [-\pi, \pi]^2 \mid |\omega_1| + |\omega_2| \leq \omega_p\} \tag{12}$$

banda de trecere de formă romboidală, cu $\omega_p < \pi$ dat. Răspunsul ideal cu fază liniară este $D(\boldsymbol{\omega}) = e^{-j(\tau_1\omega_1+\tau_2\omega_2)}$, unde τ_1, τ_2 sunt întârzieri de grup date. Energia erorii în banda de trecere este

$$E_p = \int_{\mathcal{D}} |H(\boldsymbol{\omega}) - D(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega}. \tag{13}$$

Problema de optimizare ce rezultă din cele de mai sus este minimizarea energiei (13), cu restricţiile (10) şi (11). Criteriul (13) este o funcţie pătratică convexă în coeficienţii filtrului (6), iar (11) o restricţie liniară, deci ambele uşor tratabile în contextul optimizării convexe. Dificultatea majoră provine din condiţia (10), care nu este convexă.

In [L2] propunem o optimizare în două etape. In prima etapă, condiţia (10) este înlocuită de

$$\|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})\|_\infty \leq 1. \tag{14}$$

Aceasta este o restricţie convexă ce poate fi exprimată sub forma unei inegalităţi matriceale liniare [2]. Este esenţial ca funcţia de minimizat să aibă forma (13), adică una ce permite "modelarea" benzii de trecere a filtrului. Dacă ar fi optimizată energia din banda de oprire a filtrului, atunci rezultatul trivial al optimizării cu restricţia (14) ar fi filtrul nul. Din fericire, în bancurile de filtre ortogonale, proprietăţile filtrului $H(\boldsymbol{z})$ în banda de oprire sunt corelate cu cele din banda de trecere, în sensul că o magnitudine aproximativ egală cu 1 în banda de trecere, asa cum este asigurată de minimizare criteriului (13) asigură şi o magnitudine aproximativ nulă în banda de oprire. Aşadar, in prima etapă se obţine un filtru ce respectă doar aproximativ condiţia (10).

În a doua etapă se optimizează (13) cu restricţiile (10) (într-o formă echivalentă mai simplă, dar tot neconvexă) şi (11), folosind o metodă clasică de optimizare, iniţializată cu filtrul rezultat în prima etapă. Iniţializarea bună asigură convergenţa la un minim local bun, ceea ce nu se întâmplă în cazul unei iniţializări oarecare.

Am implementat această metodă în două etape folosind Matlab şi biblioteca de optimizare convexă CVX [3], obţinând rezultate mai bune decât cele date de metode anterioare.

3 Concluzii

Am îndeplinit obiectivul principal, acela de a publica un articol într-o revistă cotată ISI. De asemenea, am reusit scrierea mai multor articole, aflate în diverse stadii de publicare. Considerăm că rezultatele obţinute promit finalizarea cu succes a proiectului.

Bibliografie

[1] R. Datko. A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quart. Appl. Math.*, 36:279–292, 1978.

[2] B. Dumitrescu. *Positive trigonometric polynomials and signal processing applications*. Springer, 2007.

[3] M. Grant and S. Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). http://stanford.edu/∼boyd/cvx, Dec. 2008.

[4] J. Zhang, C.R. Knospe, and P. Tsiotras. New results for the analysis of linear systems with time-invariant delays. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13:1149–1175, 2003.