Seminar 5

Descompunerea valorilor singulare şi aplicaţiile sale

Descompunerea valorilor singulare (DVS) este una dintre cele mai puternice metode în algebra liniară. Probleme importante precum calculul rangului unei matrice, determinarea bazelor ortogonale pentru subspaţii liniare, calculul proiecţiilor ortogonale pe subspaţii liniare, problema celor mai mici pătrate sunt rezolvate cel mai bine folosind DVS. Acest seminar este dedicat metodelor numerice de descompunere a valorilor singulare şi aplicaţiilor lor.

5.1 Preliminarii

Descompunerea valorilor singulare a unei matrice $\forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ este definită astfel: există două matrice ortogonale $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ şi $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel încât

$$U^T AV = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

unde

$$\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r},$$

cu

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0.$$

Numerele reale pozitive σ_i, $i = 1 : r$ şi $\sigma_i = 0$, $i = r + 1 : \min(m, n)$ sunt numite *valori singulare* ale lui A şi sunt *totdeauna* ordonate descrescător.

Se poate arăta (vezi cursul) că valorile singulare nenule sunt rădăcinile pătrate ale valorilor proprii nenule ale matricelor simetrice şi pozitiv semi-definite $B = A^T A$ şi $C = AA^T$, i.e. dacă valorile proprii sunt ordonate descrescător atunci, $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$, $i = 1 : r$.

În concluzie, calculul DVS este un proces infinit care poate fi trunchiat când aproximarea este considerată acceptabilă. Pentru detalii asupra algoritmului DVS vezi cursul.

Cele mai importante aplicaţii ale DVS ale unei matrice date $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sunt:

- Rangul lui A este numărul r al valorilor sale singulare nenule. Pentru conceptul de *rang numeric* consultă cursul.
- Cea mai mare valoare singulară a lui A este norma spectrală a lui A, i.e. $\sigma_1 = \|A\|_2 = max\|Ax\|_2 = \|x\| = 1$. Alte norme matriceale, conservate de către transformările ortogonale (cum este norma Frobenius), pot fi exprimate cu ajutorul valorilor singulare.
- Dacă r =rang$A$ şi notăm $U_1 = U(:,1:r)$, $U_2 = U(:,r+1:m)$, $V_1 = V(:,1:r)$ şi $V_2 = V(:,r+1:n)$ atunci
  - coloanele lui U_1 formează o bază ortogonală pentru subspaţiul liniar Im$A \subset \mathbb{R}^m$;
  - coloanele lui U_2 formează o bază ortogonală pentru subspaţiul liniar Ker$A^T \subset \mathbb{R}^m$;
  - coloanele lui V_1 formează o bază ortogonală pentru subspaţiul liniar Im$A^T \subset \mathbb{R}^n$;
  - coloanele lui V_2 formează o bază ortogonală pentru subspaţiul liniar Ker$A \subset \mathbb{R}^n$.
- Cum este cunoscut, dacă coloanele unei matrice W formează o bază ortogonală pentru un subspaţiu liniar $\mathcal{S}$, atunci $P = WW^T$ este o matrice proiecţie ortogonală pe $\mathcal{S}$.

  În concluzie, folosind DVS putem construi proiecţii ortogonale pe subspaţiile liniare ImA, Ker$A^T \subset \mathbb{R}^m$, ImA^T, Ker$A \subset \mathbb{R}^n$.
- Rezolvarea problemei generale a celor mai mici pătrate, i.e. aflarea pseudosoluţiei de normă eucidiană minimă a sistemului $Ax = b$

$$\|x^*\| = \min_{\min \|b-Ax\|} \|x\|$$

  pentru un vector dat $b \in \mathbb{R}^m$. Calculul soluţiei sistemului problemei generale celor mai mici pătrate este

$$x^* = A^{\#}b = V\Sigma^{\#}U^Tb = \sum_{k=1}^{r} \frac{v_k u_k^T b}{\sigma_k},$$

  unde u_k, v_k sunt coloanele corespunzătoare ale lui U şi V.
- Rezolvarea altor probleme de optimizare (vezi [3], [6]).
- Calculul pseudoinversei Moore-Penrose a lui A:

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T = \sum_{k=1}^{r} \frac{v_k u_k^T}{\sigma_k}.$$

Observaţie. Valorile singulare ale unei matrice sunt perfect condiţionate numeric. Poate fi atătat (vezi [3],[5],[6]) că

$$|\sigma_k(A+E) - \sigma_k(A)| \le \sigma_1(E) = \|E\|_2$$

unde matricea E este o perturbaţie a lui A, i.e. valorile singulare sunt modificate cât norma spectrală a perturbaţiei E. Deci, dacă perturbaţia este mică, variaţia valorilor singulare va fi mică. Acesta este motivarea afirmaţiei că DVS este *cea mai bună metodă* de a rezolva toate probleme numerice menţionate mai sus.

5.2 Probleme rezolvate

5.2.1 Proprietăţile DVS

Problema 5.1 Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o matrice dată şi $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ două matrice ortogonale.

a. Demonstraţi că matricele $B = A^T$ şi $C = PAQ$ au aceleaşi valori singulare cu matricea A. Dacă $A = U\Sigma V^T$ este DVS al lui A scrieţi DVS ale matricelor B şi C.

b. Demonstraţi că matricea $D = \alpha A$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, are valorile singulare $\sigma_i(D) = |\alpha|\sigma_i(A)$ şi scrieţi DVS ale lui D.

Soluţie. a. Transpusa lui $A = U\Sigma V^T$ este $B = A^T = V\Sigma^T U^T$, întrucât DVS lui B este $B = U_B\Sigma_B V_B^T$, unde $U_B = V$, $V_B = U$ sunt ortogonale şi $\Sigma_B = \Sigma^T$ este diagonală. Dar Σ_B şi Σ au acceeaşi diagonală, deci $\sigma(B) = \sigma(A)$. Similar, $C = PAQ = PU\Sigma V^T Q = U_C \Sigma V_C^T$, unde $U_C = PU$, $V_c = Q^T V$, sunt ortogonale, este DVS lui C. Bineînteles, $\sigma(C) = \sigma(A)$.

b. Dacă $\alpha = 0$, atunci $D = 0$ are toate valorile singulare egale cu zero şi DVS lui D este e.g. D (luând $U_D = I_m$ şi $V_D = I_n$). Dacă $\alpha \neq 0$, atunci $D = \alpha A = \frac{\alpha}{|\alpha|}U|\alpha|\ \Sigma V^T = U_D\Sigma_D V_D^T$, unde $U_D = \frac{\alpha}{|\alpha|}U$ şi $V_D = V$ sunt ortogonale (verifică!) şi $\Sigma_D = |\alpha|\ \Sigma$ este diagonală cu termeni diagonali pozitivi descrescători $\sigma_i(D) = |\alpha|\sigma_i(A)$.

Problema 5.2 a. Demonstraţi că norma matriceală Frobenius $\|\cdot\|_F$, definită pentru toate matricele $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

şi norma matriceală spectrală $\|\cdot\|_2$, definită de

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2,$$

sunt invariante la transformări ortogonale, i.e.

$$\|U^T A\|_F = \|AV\|_F = \|A\|_F \qquad \|U^T A\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2,$$

unde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ şi $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt ortogonale, şi exprimaţi-le în funcţie de valorile singulare ale lui A.

b. Demonstraţi că

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\mathrm{rang}(A)}\|A\|_2.$$

c. Dacă matricea A este pătratică şi nesingulară, exprimaţi numerele de condiţionare $\kappa_F = \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F$ şi $\kappa_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ în funcţie de valorile singulare A.

Soluţie. a. Începem prin a demonstra că norma matriceală Frobenius este invariabilă la transformări ortogonale. Avem $\|U^T A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^T U U^T A) = \mathrm{tr}(A^T A) = \|A\|_F^2$ şi $\|AV\|_F^2 = \mathrm{tr}(AVV^T A^T) = \mathrm{tr}(AA^T) = \|A\|_F^2$. Dacă $A = U\Sigma V^T$ este DVS a lui A, atunci

$$\|A\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2},$$

unde r este numărul valorilor singulare nenule ale lui A.

Deoarece norma vectrală euclidiană este invariantă la transformările ortogonale, i.e. $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ pentru toate matricele ortogonale Q şi toţi vectorii x, avem pentru norma spectrală

$$\|U^T A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|U^T Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

şi

$$\|AV\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|AVx\|_2 = \max_{\|w\|_2 = 1} \|Aw\|_2 = \|A\|_2,$$

unde $w = Vx$. Pentru a exprima $\|A\|_2$ în funcţie de valorile singulare ale lui A avem:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|U\Sigma V^T x\|_2 = \max_{\|w\|_2 = 1} \|\Sigma w\|_2 =$$

$$= \max_{\|w\|_2 = 1} \sqrt{\sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 w_n^2} =$$

$$= \max_{\|w\|_2 = 1} \sqrt{\sigma_1^2(1 - w_2^2 - \cdots - w_n^2) + \sigma_2^2 w_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 w_n^2} =$$

$$= \max_{\|w\|_2 = 1} \sqrt{\sigma_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) w_2^2 + \cdots + (\sigma_n^2 - \sigma_1^2) w_n^2}.$$

Dar $\sigma_1 \geq \sigma_i$ pentru toţi $i = 2 : n$, deci $\sigma_i^2 - \sigma_1^2 \leq 0$ pentru toţi $i = 2 : n$ şi maximul este obţinut pentru $w_i = 0$ pentru toţi $i = 2 : n$. În concluzie

$$\|A\|_2 = \sigma_1,$$

i.e. norma spectrală a lui A este cea mai mare valoare singulară a lui A.

b. Rangul $r = \text{rang}(A)$ al matricei A este numărul valorilor singulare nenule ale lui A. Bineînţeles, $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2 \leq \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = \|A\|_F^2$. Deci $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$. Deoarece valorile singulare sunt totdeauna ordonate descrescător, avem $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \leq r\sigma_1^2 = r\|A\|_2^2$. Deci $\|A\|_F \leq \sqrt{r}\|A\|_2$.

Observaţie. Două norme matriceale μ şi ν sunt numite *echivalente* dacă există două numere pozitive κ_1 şi κ_2 astfel încât $\kappa_1 \nu(A) \leq \nu(A) \leq \kappa_2 \nu(A)$ pentru toate matricele A. În concluzie $\|\cdot\|_2$ şi $\|\cdot\|_F$ sunt două norme matriceale echivalente.

c. Dacă matricea A este pătratică ($m = n$) şi nesingulară, atunci rang$A = n$, i.e. toate valorile sale singulare sunt nenule. Deci, dacă $A = U\Sigma V^T$ este DVS lui A, atunci Σ este nesingulată şi $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. Astfel, dacă $\sigma(A) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, atunci valorile singulare ale lui A^{-1} sunt $\sigma(A^{-1}) = \{1/\sigma_n, 1/\sigma_{n-1}, \ldots, 1/\sigma_1\}$ (valorile singulare sunt totdeauna ordonate descrescător!). Aşadar avem

$$\|A^{-1}\|_F = \sqrt{\frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_{n-1}^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_1^2}} \quad \text{si} \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}.$$

În concluzie

$$\kappa_F = \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_{n-1}^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_1^2}}$$

şi

$$\kappa_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Problema 5.3 Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică, i.e. satisface condiţia $A^T = A$ şi fie $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, cu $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ mulţimea valorilor sale proprii. Demonstraţi că valorile singulare ale lui A sunt $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1\!:\!n$.

Soluţie. Întâi, matricele simetrice au spectre proprii reale şi forma lor Schur este diagonală (vezi problema rezolvată 4.7, seminar 4). Acum, fie $S = Q^T AQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ cu Q ortogonal şi $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Rezultă $Q^T A^T AQ = Q^T A^T QQ^T AQ = \Lambda\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2)$. În concluzie, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\lambda_i(A^2)} = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$, $i = 1 : n$.

Problema 5.4 Demonstraţi că o matrice patratică are (cel puţin) o valoare singulară zero doar dacă are o valoare proprie zero.

Soluţie. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. În seminarul 4 am demonstrat că $\det A = \prod \lambda_i$. Ţinând cont că $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i^2(A^T A)}$ avem $0 \in \lambda(A) \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \det A^T A = 0 \Leftrightarrow 0 \in \sigma(A)$.

Problema 5.5 Fie $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o matrice cu coloanele ortogonale, i.e. $Q^T Q = I_n$.

a. Cât este $\|Q\|_2$?

b. Fie $R \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m - n + 1$ o matrice obţinută din Q prin eliminarea a cel mult $n - 1$ linii. Demonstraţi că $\|R\|_2 = \|Q\|_2$.

Soluţie. a. Deoarece $Q^T Q = I_n$, toate valorile singulare ale lui Q sunt egale cu 1. Rezultă $\|Q\|_2 = \sigma_1 = 1$.

b. Pentru a arăta că $\|R\|_2 = 1$, se observă întâi că permutarea liniilor matricei este o transformare ortogonală şi că o transformare ortogonală nu schimbă valorile singulare (vezi problema rezolvată 4.1). Aşadar, permutările liniilor nu schimbă norma spectrală. Deci, nu pierdem din generalitate dacă presupunem că rândurile $k = m - p \leq n - 1$ eliminate din matricea Q sunt ultimele, i.e. putem scrie $Q = \begin{bmatrix} R \\ T \end{bmatrix}$. Fie $R = UCV^T$ DVS a matricei R, unde $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots c_n)$, şi $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$ sunt valorile singulare ale lui R. Dar $Q^T Q = R^T R + T^T T = I_n$. Rezultă $R^T R = I_n - VC^2V^T = V(I_n - C^2)V^T = VS^2V^T$, unde $S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots s_n)$, cu $s_i = \sqrt{1 - c_i^2}$ valorile singulare ale matricei R în ordine crescătoare. Deoarece matricea T are cel mult $n - 1$ linii, are cel mult $n - 1$ valori singulare nenule. În concluzie, $s_1 = 0$, i.e. $c_1 = \|R\|_2 = 1$. Aparent, acesta este un rezultat uimitor: eliminarea unui număr de elementele posibile nenule ai unei matrice nu schimbă norma sa spectrală. Explicaţia constă în faptul că o asemenea eliminare nu modifică cea mai mare valoare singulară care este norma spectrală.

Problema 5.6 Demonstraţi că orice matrice $m \times n$ reală este limita unei mulţimi de rang maxim $m \times n$ real matriceal. Interpretaţi importanţa acestui rezultat pentru practica numerică.

Soluţie. Fie $A = U\Sigma V^T$ DVS matricei A, unde $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$, cu $p = \min(m, n)$. Bineînteles, există mulţimea de numere reale $(\gamma_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ca $\lim_{k\to\infty} \gamma_i^{(k)} = \sigma_i$ şi $\gamma_i^{(k)} \neq 0$

pentru toţi i şi k. Dacă definim matricele $\Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \ldots, \gamma_p^{(k)})$, şi $A_k \stackrel{\text{def}}{=} U\Gamma_k V^T$, atunci toate matricele A_k au rang maxim şi $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. Asta înseamnă că la apropierea de oricare matrice $m\times n$ (inclusiv matricea $m\times n$ nulă) există matrice de rang maxim. Astfel, într-un mediu de calcul aproximativ rangul matematic al unei matrice nu are relevenţă deoarece erorile de rotunjire pot schimba rangul unei matrice date în rangul maxim. Această observaţie subliniază importanţa conceptului de *rang numeric*.

5.2.2 Calculul DVS

Problema 5.7 Fie $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ doi vectori daţi.

a. Care este DVS lui $A = uv^T$? Cât este rangul lui A ?

b. Demonstraţi că orice matrice de rang 1 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ poate fi scrisă sub forma $A = bc^T$, unde $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

c. Dacă $m = n$, propuneţi un algoritm care să calculeze DVS a lui $A = I_n + uv^T$. Cât este rangul lui A ?

Soluţie. **a.** Dacă $U_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt reflectori Householder astfel luaţi încât $U_1 u = \|u\| e_1 \in \mathbb{R}^m$ şi $V_1 v = \|v\| e_1 \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$U_1^T A V_1 = \begin{bmatrix} \|u\|\|v\| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

este DVS a lui A. Valorile singulare sunt $\sigma_1 = \|u\|\|v\|$ şi $\sigma_i = 0$ pentru $i > 1$. Bineînţeles, $rank(A) = 1$ dacă $u \neq 0$, $v \neq 0$, şi zero altfel.

b. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ are rangul 1, atunci valorile sale singulare sunt $\sigma_1 \neq 0$ şi $\sigma_i = 0$ pentru $i > 1$. În concluzie, din DVS a lui A, i.e $U^T AV = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, 0, \ldots, 0)$, avem

$$A = U\Sigma V^T = U(:,1)\sigma_1(V(:,1))^T = bc^T,$$

unde e.g. $b = \sigma_1 U(:,1) \in \mathbb{R}^m$, $c = V(:,1) \in \mathbb{R}^n$.

c. Dacă $u = 0$ şi/sau $v = 0$, atunci $A = I_n$ şi luând $U = V = I_n$ matricea A este propriul său DVS cu toate valorile proprii egale cu 1. Presupunând acum că $u \neq 0$, $v \neq 0$ şi rezultă $\bar{u} = \dfrac{u}{\|u\|}$ şi $\bar{v} = \dfrac{v}{\|v\|}$. Acum putem construi o matrice ortogonală $W \in \mathbf{R}^{n\times n}$ astfel încât $W\bar{u} \perp \bar{v}$ (vezi problema rezolvată 3.4 din seminarul 3). Fie $w = W\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ cu, bineînţeles, $\|w\| = 1$. Procedând la fel ca în problema rezolvată 3.3 (vezi seminarul 3) putem acum calcula o matrice $Y \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ cu coloane ortogonale (i.e. $Y^T Y = I_{n-2}$) la fel cum matricea $U = [\bar{v}\ w\ Y]$ să fie ortonolală. Desigur, matricea $V = [w\ \bar{v}\ Y]$ este de asemenea ortogonală. Atunci

$$U^T AV = U^T(I + uv^T)V = \begin{bmatrix} \bar{v}^T \\ w^T \\ Y^T \end{bmatrix} (I + uv^T)[w\ \bar{v}\ Y] =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{v}^T(I + uv^T)w & \bar{v}^T(I + uv^T)\bar{v} & \bar{v}^T(I + uv^T)Y \\ w^T(I + uv^T)w & w^T(I + uv^T)\bar{v} & w^T(I + uv^T)Y \\ Y^T(I + uv^T)w & Y^T(I + uv^T)\bar{v} & Y^T Y \end{bmatrix}.$$

Dar, $v^TY = 0$, $\bar{v}^TY = 0$, $v^Tw = 0$, $Y^Tw = 0$, $Y^TY = I_{n-2}$ şi $w^Tw = 1$, $\bar{v}^T\bar{v} = 1$. În concluzie, $\alpha = 1 + \bar{v}^Tuv^T\bar{v} = 1 + v^Tu$ şi $\beta = w^Tuv^T\bar{v}$ obţinem

$$U^TAV = \begin{bmatrix} 0 & 1+\bar{v}^Tuv^T\bar{v} & 0 \\ 1 & w^Tuv^T\bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

şi problema a fost redusă la cazul 2×2. Întradevăr, fie matricea 2×2 $B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ care are DVS $U_B^TBV_B = \Sigma_B$. Atunci

$$\tilde{U}^TA\tilde{V} = \begin{bmatrix} U_B^T & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} U^TAV \begin{bmatrix} V_B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

este diagonală şi dacă $\sigma_1(B) \geq \sigma_2(B) \geq 1$ este DVS lui A. În orice caz, valorile singulare ale matricei A sunt $\sigma(A) = \sigma(B) \cup \sigma(I_{n-2})$, i.e. $n-2$ valori singulare sunt egale cu 1 şi celelalte două sunt cele ale lui B.

Observaţie. Cu toate că în cazul general valorile singulare ale unei matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cu $\min(m,n) > 4$ nu pot fi calculate într-un număr finit de operaţii aritmetice, în unele cazuri speciale, ca cel de mai sus, este posibil.

Problema 5.8 Considerăm o matrice superior bidiagonală $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definită de vectorul $f \in \mathbb{R}^n$,al elementelor diagonale şi de vectorul $g \in \mathbb{R}^{n-1}$ format din elementele primei supradiagonale diagonalei, i.e.

$$J = \begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & \\ & f_2 & \ddots & \\ & & \ddots & g_{n-1} \\ & & & f_n \end{bmatrix}.$$

Arătaţi că dacă matricea J are două valori singulare egale $\sigma_i = \sigma_{i+1}$, atunci f şi/sau g are un element nul.

Soluţie. Matricea $T = J^TJ$ este tridiagonală, simetrică şi pozitiv semidefinită. Deoarece $\lambda_i(T) = \sigma_i^2(J)$, matricea T are (cel puţin) două valori proprii egale. Vom arăta că în aceste condiţii matricea T este reductibilă, i.e există i astfel încât $T(i+1,i) = g_if_i = 0$. În concluzie, $g_i = 0$ şi/sau $f_i = 0$. Fie $\lambda \in \lambda(T)$ valoarea proprie dublă a lui T. Atunci există doi vectori proprii ortogonali x şi y, asociaţi valorilor proprii λ, i.e. $Tx = \lambda x$ şi $Ty = \lambda y$, cu $y^Tx = 0$. Presupunem că matricea T este ireductibilă, i.e. $T(i+1,i) \neq 0$ pentru toţi $i = 1:n-1$. Considerăm matricea $S = T - \lambda I_n$ şi partiţionând-o sub forma $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, unde $S_{11} = S(1:n-1,1) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$ şi $S_{12} = S(1:n-1,2:n) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ deoarece T este ireductibilă, blocul S_{12} este nesingular. Atunci $x(2:n) = -S_{12}^{-1}S_{11}x(1)$. Deoarece $x \neq 0$, avem $x(1) \neq 0$. Similar $y(2:n) = -S_{12}^{-1}S_{11}y(1)$ cu $y(1) \neq 0$. Rezultă că vectorii x şi y sunt coliniari, ceea ce reprezintă o contradicţie cu faptul că sunt ortogonali. În concluzie T nu poate fi ireductibil. Demonstraţia este completă.

Problema 5.9 Adaptaţi algoritmul **JQ** pentru o reducere eficientă a unei matrice superior triunghiulare $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la forma superior bidiagonală folosind transformări ortogonale de echivalenţă.

Soluţie. Să introducem aşa numitele rotaţii *modificate* P_{ij}, $i < j$, care fac să se anuleze elementul x_i pentru un vector dat $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $(P_{ij}^T x)(i) = 0$ (în loc să se anuleze elementul x_j ca pentru rotaţiile obişnuite). Este uşor de văzut că scalarii definitori c, s şi $x \leftarrow P_{ij}^T x$ pot fi calculaţi în acest caz după cum urmează:

1. $\rho = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}$
2. $c = \dfrac{x_j}{\rho}$
3. $s = \dfrac{x_i}{\rho}$
4. $x_i \leftarrow 0$
5. $x_j \leftarrow \rho$.

Pentru a exploata structura superior triunghiulară a lui A, vom folosi o secvenţă de rotaţii plane modificate ca în următoare schemă de calcul:

1. `pentru` $k = n : -1 : 3$
   1. `pentru` $i = 1 : k - 2$
      1. Se calculează rotaţia plană modificată $P_{i,i+1}$ astfel ca $(P_{i,i+1}^T A)(i, k) = 0$.
      2. $A \leftarrow P_{i,i+1}^T A$ % structura este modificată în poziţia $(i + 1, i)$.
      3. Se calculează rotaţia plană modificată $Q_{i,i+1}$ astfel ca $(AQ_{i,i+1})(i + 1, i) = 0$.
      4. $A \leftarrow AQ_{i,i+1}$.

Când $n = 4$, primul pas al ciclului extern "pentru" este exemplificat mai jos:

$$A \leftarrow P_{12}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \emptyset \\ + & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix}, \quad A \leftarrow AQ_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 \\ \emptyset & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix},$$

$$A \leftarrow P_{23}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 \\ & \times & \times & \emptyset \\ & + & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix}, \quad A \leftarrow AQ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 \\ & \times & \times & 0 \\ & \emptyset & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix}.$$

unde $+$ reprezintă zerourile modificate, $\emptyset$ reprezintă ultimele zerouri introduse şi 0 reprezintă zerourile introduse la paşii anteriori.

Acum este uşor să transformăm schema de calcul într-un algoritm detaliat.

1. `pentru` $k = n : -1 : 3$
   1. `pentru` $i = 1 : k - 2$
      1. $\rho = \sqrt{a_{ik}^2 + a_{i+1,k}^2}$

2. $c = \dfrac{a_{i+1,k}}{\rho}$
3. $s = \dfrac{a_{i,k}}{\rho}$
4. $a_{ik} \leftarrow 0$
5. $a_{i+1,k} \leftarrow \rho$
6. $a_{i+1,i} = sa_{ii}$
7. **pentru** $j = i + 1 : k - 1$
   1. $\tau = aij$
   2. $a_{ij} = ca_{ij} - sa_{i+1,j}$
   3. $a_{i+1,i} = s\tau + ca_{i+1,j}$
8. $\rho = \sqrt{a_{ik}^2 + a_{i+1,k}^2}$
9. $c = \dfrac{a_{i+1,i}}{\rho}$
10. $s = \dfrac{a_{i+1,i+1}}{\rho}$
11. $a_{i+1,i} \leftarrow 0$
12. $a_{i+1,i+1} \leftarrow \rho$
13. **pentru** $l = 1 : i$
    1. $\tau = a_{l,i}$
    2. $a_{li} = a_{li}c + a_{l,i+1}s$
    3. $a_{l,i+1} = -\tau s + a_{l,i+1}s$.

Numărul de flopi necesari algoritmului (care nu cumulează şi transformările) este $N_{fl} \approx 2n^3$, în comparaţie cu $N_{fl} \approx 8n^3/3$ flopi necesari algoritmului JQ.

Problema 5.10 Adaptaţi algoritmul **JQ** pentru o reducere eficientă a unei matrice tridiagonale $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la o formă superior bidiagonală folosind transformări ortogonale de echivalenţă.

Soluţie. Să aplicăm întâi o secvenţă rotaţii plane pentru a reduce matricea tridiagonală la forma superior triunghiulară (cu numai două supradiagonale nenule), ca în următoarea schemă de calcul:

1. **pentru** $k = 1 : n - 1$
   1. calculează rotaţia plană $P_{k,k+1}$ ca $(P_{k,k+1}^T T)(k + 1, k) = 0$.
   2. $T \leftarrow P_{k,k+1}^T T$.

Acum, putem adapta soluţia bazându-ne pe soluţia problemei rezolvate anterior:

1. $p = n$
2. **pentru** $k = n : -1 : 3$
   1. $p = \max\{1, p - 2\}$
   2. **pentru** $i = p : k - 2$
      1. Se calculează rotaţia plană modificată $P_{i,i+1}$ astfel ca $(P_{i,i+1}^T A)(i, k) = 0$.
      2. $A \leftarrow P_{i,i+1}^T A$ % structura este modificată în poziţia $(i + 1, i)$.

3. Se calculează rotaţia plană modificată $Q_{i,i+1}$ astfel ca $(AQ_{i,i+1})(i+1,i) = 0$.
4. $A \leftarrow AQ_{i,i+1}$.

Observăm că pentru $k = n$ trebuie să eliminăm doar un element două elemente $t_{n-3,n-1}$ şi $t_{n-4,n-1}$ deoarece termenul zero $t_{n-4,n-1}$ a fost modificat prin înmulţire la dreapta cu $Q_{n-1,n}$ etc. Pentru a ne descurca cu aceasta modificare structurală am introdus variabila întreagă p. Algoritmul detaliat este:

1. `pentru` $k = 1 : n-1$
   1. $\rho = \sqrt{t_{kk}^2 + t_{k+1,k}^2}$
   2. $c = \dfrac{t_{k,k}}{\rho}$
   3. $s = \dfrac{-t_{k+1,k}}{\rho}$
   4. $t_{kk} \leftarrow \rho$
   5. $t_{k+1,k} \leftarrow 0$
   6. $\tau = t_{k,k+1}$
   7. $t_{k,k+1} = ct_{k,k+1} - st_{k+1,k+1}$
   8. $t_{k+1,k+1} = s\tau + ct_{k+1,k+1}$
   9. `dacă` $k < n-1$
      1. $t_{k,k+2} = -st_{k+1,k+2}$
      2. $t_{k+1,k+2} = ct_{k+1,k+2}$
2. $p = n$
3. `pentru` $k = n : -1 : 3$
   1. $p = \max\{1, p-2\}$
   2. `pentru` $i = p : k-2$
      1. $\rho = \sqrt{t_{ik}^2 + t_{i+1,k}^2}$
      2. $c = \dfrac{t_{i+1,k}}{\rho}$
      3. $s = \dfrac{t_{i,k}}{\rho}$
      4. $t_{ik} \leftarrow 0$
      5. $t_{i+1,k} \leftarrow \rho$
      6. $t_{i+1,i} = st_{ii}$
      7. $t_{ii} = ct_{ii}$
      8. `pentru` $j = i+1 : k-1$
         1. $\tau = tij$
         2. $t_{ij} = ct_{ij} - st_{i+1,j}$
         3. $t_{i+1,i} = s\tau + ct_{i+1,j}$
      9. $\rho = \sqrt{t_{i+1,i}^2 + t_{i+1,i+1}^2}$
      10. $c = \dfrac{t_{i+1,i+1}}{\rho}$
      11. $s = \dfrac{t_{i+1,i}}{\rho}$
      12. $t_{i+1,i} \leftarrow 0$
      13. $t_{i+1,i+1} \leftarrow \rho$
      14. $q = \max\{1, p-2\}$

15. `pentru` $l = q : i$
    1. $\tau = t_{li}$
    2. $t_{li} = t_{li}c - t_{l,i+1}s$
    3. $t_{l,i+1} = \tau s + t_{l,i+1}c$.

Problema 5.11 Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, cu $m < n$, o matrice dată. Scrieţi un algoritm eficient pentru calculul matricelor ortogonale $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel ca $U^TAV = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$ cu $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ superior bidiagonală.

Soluţie. Aplicăm algoritmul **JQ** pentru a reduce matricea A la o formă superior bidiagonală obţinem:

$$A \leftarrow U^TAV = \begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru ca termenii nenuli să dispară $(m, n+1)$ aplicăm în partea dreaptă o secvenţa de rotatii plane $A \leftarrow AP_{m,m+1}P_{m-1,m+1}\ldots P_{1,m+1}$ care mută termenii nenuli în sus pe coloana $m+1$ până când sunt eliminaţi, ca în exemplul următor cu $m = 3$, $n = 5$:

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & & & \\ & \times & \times & & \\ & & \times & + & \end{bmatrix}, \quad A \leftarrow AP_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & & & \\ & \times & \times & + & \\ & & \times & \emptyset & \end{bmatrix},$$

$$A \leftarrow AP_{24} = \begin{bmatrix} \times & \times & & + & \\ & \times & \times & \emptyset & \\ & & \times & & \end{bmatrix}, \quad A \leftarrow AP_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & & \emptyset & \\ & \times & \times & & \\ & & \times & & \end{bmatrix}.$$

Schema de calcul este:

1. $A \leftarrow B = \mathbf{JQ}(A)$
2. `pentru` $k = m : -1 : 1$
    1. Se calculează rotaţia plană $P_{i,m+1}$ astfel ca $(AP_{i,m+1})(i, m+1) = 0$.
    2. $A \leftarrow AP_{i,m+1}$

şi algoritmul detaliat:

1. $A \leftarrow B = \mathbf{JQ}(A)$
2. `pentru` $k = m : -1 : 1$
    1. $\rho = \sqrt{a_i i^2 + a_{i,m=1}^2}$
    2. $c = a_{ii}/\rho$
    3. $s = a_{i,m+1}/\rho$
    4. $a_{ii} = \rho$
    5. $a_{i,m+1} = 0$
    6. **dacă** $i > 1$
        1. $a_{i-1,m+1} = a_{i-1,i}s$
        2. $a_{i-1,i} = a_{i-1,i}c$.

Efortul de calcul cel mai mare este în executarea procedurii **JQ**.

5.2.3 Aplicaţiile SVD

Problema 5.12 Considerăm matricele $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi sistemul matriceal:

$$\begin{cases} AX - YB = C \\ XB^T - A^TY = D \end{cases}$$

a. Arătaţi că sistemul matriceal de mai sus are o soluţie unică $(X,Y) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ dacă şi numai dacă $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

b. Presupunând condiţia de mai sus satisfăcută, scrieţi un algoritm care să calculeze soluţia (X,Y).

Soluţie. a. Fie descompunerea valorilor singulare ale lui A şi B: unde $A = U_A\Sigma_AV_A^T$, $B = U_B\Sigma_BV_B^T$. Folosindu-le sistemul matriceal devine:

$$\begin{cases} U_A\Sigma_AV_A^TX - YU_B\Sigma_BV_B^T = C \\ XV_B\Sigma_B^TU_B^T - V_A\Sigma_A^TU_A^TY = D \end{cases},$$

sau

$$\begin{cases} \Sigma_A\tilde{X} - \tilde{Y}\Sigma_B = \tilde{C} \\ \tilde{X}\Sigma_B^T - \Sigma_A^T\tilde{Y} = \tilde{D} \end{cases},$$

unde

$$\tilde{X} = V_A^TXV_B, \quad \tilde{Y} = U_A^TYU_B, \quad \tilde{C} = U_A^TXV_B, \quad \tilde{D} = V_A^TXU_B.$$

Bineînţeles sistemul matriceal iniţial are o soluţie unică dacă şi numai dacă sistemul transformat are o soluţie unică. Dar sistemul matriceal transformat poate fi scris ca un set de mn sisteme liniare de două ecuaţii cu două necunoscute, luând ecuaţiile scalare (ij) din cele două ecuaţi matricele:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^{(A)} & -\sigma_j^{(B)} \\ \sigma_j^{(B)} & -\sigma_i^{(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{ij} \\ \tilde{d}_{ij} \end{bmatrix},$$

unde $\sigma_i^{(A)}$, $i = 1 : m$ sunt valorile singulare ale lui A şi $\sigma_j^{(B)}$, $j = 1 : n$ sunt valorile singulare ale lui B. Fiecare dintre aceste sisteme are o soluţie unică (x_{ij}, y_{ij}) dacă şi numai dacă matricea $\begin{bmatrix} \sigma_i^{(A)} & -\sigma_j^{(B)} \\ \sigma_j^{(B)} & -\sigma_i^{(A)} \end{bmatrix}$ este nesingulară, i.e. $\sigma_i^{(A)} \neq \sigma_j^{(B)}$ (deoarece valorile singulare sunt numere reale pozitive). Toate i şi j aceste condiţii sunt echivalente cu $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

b. Pentru a rezolva sistemul matriceal putem proceda ca mai sus. Dacă **dvs** este metoda pentru a calcula DVS unei matrice date, atunci putem folosi următoarea schemă de calcul:

1. $[\,U_A, \Sigma_A, V_A\,] = \mathbf{svd}(A)$
2. $[\,U_B, \Sigma_B, V_B\,] = \mathbf{svd}(B)$
3. $\tilde{C} = U_A^TXV_B$
4. $\tilde{D} = V_A^TXU_B$
5. `pentru` $i = 1 : m$
    1. `pentru` $j = 1 : n$

1. rezolvă sistemul liniar $\begin{bmatrix} \sigma_i^{(A)} & -\sigma_j^{(B)} \\ \sigma_j^{(B)} & -\sigma_i^{(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{ij} \\ \tilde{d}_{ij} \end{bmatrix}$.

6. $X = V_A \tilde{X} V_B^T$
7. $Y = U_A \tilde{Y} U_B^T$.

Detaliile sunt lăsate pentru studenţi.

Problema 5.13 Considerăm matricea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi vectorul $b \in \mathbb{R}^m$.

a. Arătaţi că pentru $\alpha > 0$ problema de minimizare

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{\|b - Ax\|^2 + \alpha\|x\|^2\right\}$$

admite o soluţie unică x^*_α.

b. Acest lucru se întâmplă şi pentru $\alpha \searrow 0$?

c. Scrieţi un algoritm eficient pentru a calcula soluţia x^*_α.

d. Arătaţi că sistemul liniar

$$(A^TA + \alpha I_n)(A^TA + \beta I_n)y = (\beta - \alpha)A^Tb$$

este satisfăcut de $y \overset{\text{not}}{=} x^*_\alpha - x^*_\beta$.

Soluţie. a. Folosind DVS $A = U\Sigma V^T$ şi ţinând cont că norma euclidiană este invariantă la transformările ortogonale, problema devine echivalentă cu următoarea problemă de minimizare:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{\|b - Ax\|^2 + \alpha\|x\|^2\right\} = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{\|b - U\Sigma V^Tx\|^2 + \alpha\|V^Tx\|^2\right\} =$$

$$= \min_{y\in\mathbb{R}^n} \{\|d - \Sigma y\|^2 + \alpha\|y\|^2\},$$

unde $d = U^Tb$ şi $y = V^Tx$. Bineînteles această problemă este simplă şi poate fi rezolvată uşor. Pentru aceasta, fie r rangul lui A. Avem

$$\|d - \Sigma y\|^2 + \alpha\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((d_i - \sigma_i y_i)^2 + \alpha y_i^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(d_i^2 - 2d_i\sigma_i y_i + (\sigma_i^2 + \alpha)y_i^2\right) + \sum_{i=r+1}^{n} \left(d_i^2 + \alpha y_i^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha d_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha} - \left(\frac{d_i\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \alpha}} - \sqrt{\sigma_i^2 + \alpha}\, y_i \right)^2 \right) + \sum_{i=r+1}^{n} \left(d_i^2 + \alpha y_i^2\right).$$

În concluzie minimul este atins pentru y unic dat de

$$y_i = \frac{d_i\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha},\ \ i = 1 : r, \qquad y_i = 0,\ \ i = r + 1 : n$$

şi valoarea sa este

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n}\{\|d-\Sigma y\|^2+\alpha\|y\|^2\}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha d_i^2}{\sigma_i^2+\alpha}+\sum_{i=r+1}^{n}d_i^2.$$

Pentru problema iniţială de minimizare soluţia este unică şi dată de $x_\alpha^* = Vy = V_1 y(1:r)$, unde $V_1 = V(:,1:r)$. Observăm că pentru $\alpha \geq 0$ diagonala matricei $\Sigma_1^2+\alpha I_r$ este nesingulară. Avem $y(1:r) = (\Sigma_1^2+\alpha I_r)^{-1}\Sigma_1 d(1:r)$. Dar $d(1:r) = (U^T b)(1:r) = U_1^T b$, unde $U_1 = U(:,1:r)$. În concluzie, soluţia problemei iniţiale de minimizare poate fi scrisă sub forma

$$x_\alpha^* = V_1(\Sigma_1^2+\alpha I_r)^{-1}\Sigma_1 U_1^T b.$$

b. Când $\alpha \searrow 0$ obţinem

$$x_0^* = V_1(\Sigma_1^2)^{-1}\Sigma_1 U_1^T b = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T b = A^{\#}b,$$

unde $A^{\#}$ este pseudoinversa lui A, i.e. x_0^* este soluţia problemei celor mai mici pătrate pentru sistemul liniar $Ax=b$.

c. Algoritmul pentru calcularea vectorului x_α^*:

1. $[\,U,\Sigma,V\,] = \mathbf{dvs}(A)$
2. $d = (U(:,1:r))^T b$
3. `pentru` $i = 1:r$
   1. $d_i = \dfrac{d_i\sigma_i}{\sigma_i^2+\alpha}$
4. $x_\alpha^* = V(:,1:r)d$.

Detaliile sunt lăsate pentru studenţi.

d. Pentru a arăta că

$$(A^TA+\alpha I_n)(A^TA+\beta I_n)(x_\alpha^*-x_\beta^*) = (\beta-\alpha)A^Tb$$

observăm întâi că, cu notaţi uzuale, $A^TA = V_1\Sigma_1^2V_1^T$ şi, în concluzie

$$(A^TA+\gamma I_n)x_\gamma^* = (V_1\Sigma_1^2V_1^T+\gamma I_n)V_1(\Sigma_1^2+\gamma I_r)^{-1}\Sigma_1U_1^Tb =$$

$$= V_1(\Sigma_1^2+\gamma I_n)(\Sigma_1^2+\gamma I_r)^{-1}\Sigma_1U_1^Tb = V_1\Sigma_1U_1^Tb = A^Tb$$

pentru $\gamma \in \{\alpha,\beta\}$, deoarece $V_1^TV_1 = I_r$. Dar matricele $A^TA+\alpha I_n$ şi $A^TA+\beta I_n$ comută. Atunci, avem

$$(A^TA+\alpha I_n)(A^TA+\beta I_n)x_\alpha^* = (A^TA+\beta I_n)(A^TA+\alpha I_n)x_\alpha^* =$$

$$= (A^TA+\beta I_n)A^Tb = A^TAA^Tb+\beta A^Tb.$$

Scăzând,

$$(A^TA+\alpha I_n)(A^TA+\beta I_n)x_\beta^* = A^TAA^Tb+\alpha A^Tb.$$

Înlocuind ultimele două relaţii obţinem rezultatul dorit.

5.3 Probleme propuse

Problema 5.14 Care sunt valorile singulare ale matricelor:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ?$$

Problema 5.15 Arătaţi că matricea $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ este normală, i.e. $AA^T = A^T A$, şi calculaţi valorile sale proprii şi valorile sale singulare. Verificaţi că $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1:3$.

Problema 5.16 **a.** Daţi formule explicite pentru a calcula valorile singulare ale matricei $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Aplicaţi-le pentru a calcula valorile singulare pentru $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b. Aceeaşi problemă pentru cazul simetric, i.e. daţi formule explicite pentru a calcula valorile singulare ale matricei $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$. Aplicaţi-le pentru a calcula valorile singulare pentru $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Indicaţie: **a.**

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \sqrt{\left(\alpha^2 - \delta^2\right)^2 + \left(\beta^2 - \gamma^2\right)^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta)^2}\right)},$$

etc.

Problema 5.17 Arătaţi că dacă $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are rangul n, atunci $\|A(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = 1$.

Problema 5.18 Calculaţi valorile singulare pentru o matrice ortogonală $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Problema 5.19 Fie $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$ o matrice cu coloanele ortogonale. Matricea $P = VV^T$ este numită *matrice de proiecţie ortogonală* pe subspaţiul liniar $\mathrm{Im}V$.

a. Arătaţi că matricea $Q = I - 2P$ este ortogonală.

b. Calculaţi valorile singulare ale unei matrice de proiecţie ortogonală.

Problema 5.20 Fie $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ două matrice pătratice. Am demonstrat că AB şi BA au aceeleaşi valori proprii. Acest lucru este adevărat şi pentru valorile singulare ale matricelor AB şi BA?

5.4 Bibliografie

1. B. Jora, B. Dumitrescu, C. Oară, NUMERICAL METHODS, UPB, Bucharest, 1995.
2. G.W. Stewart, INTRODUCTION TO MATRIX COMPUTATIONS, Academic Press, 1973.
3. G. Golub, Ch. Van Loan, MATRIX COMPUTATIONS, 3-rd edition, John Hopkins University Press, 1998.
4. G.W. Stewart, MATRIX ALGORITHMS, vol.1: Basic Decompositions, SIAM, 1999.
5. G.W. Stewart, MATRIX ALGORITHMS, vol.2: Eigensystems, SIAM, 2001.
6. B. Dumitrescu, C. Popeea, B. Jora, METODE DE CALCUL NUMERIC MATRICEAL. ALGORITMI FUNDAMENTALI, ALL, Bucureşti, 1998.

5.5 Programe MATLAB

În această secţiune sunt date programele MATLAB pentru implementarea algoritmilor prezentaţi în acest seminar. Programele au fost testate şi pot fi obţinute de la autorul lor menţionat în comentariile ataşate.

```
function [A]=JQ_ortogonal(A)
%------------------------------------------------------------
% Se da o matrice A(nxm). Algoritmul ofera o metoda eficienta pentu
% calculul matricelor ortogonale U (mxm) si V (nxn) cu U_transpus*A*V=[B 0].
% B este o matrice superior bidiagonala.
% Apelul: A=JQ_ortogonal(A)
%
% Dumitru Iulia, mai 2006.
%------------------------------------------------------------
[n,m]=size(A);
B=JQ(A);
A=B;
for k=m:-1:1
    rho=sqrt(A(i,i)*A(i,i)+A(i,m=1)*A(i,m=1));
    c=A(i,i)/rho;
    s=A(i,m+1)/rho
    A(i,i)=rho
    A(i,m+1)=0;
    if i>1
        A(i-1,m+1)=A(i-1,i)*s;
        A(i-1,i)=A(i-1,i)*c;
    end
end
```

```
function [T]=JQ_tridiagonal(T);
%------------------------------------------------------------
% Se da o matrice patratica, superior tridiagonala T. Algoritmul ofera o
% reducere eficienta a matricei A la forma superior bidiagonala, folosind
% algoritmul JQ si transformarile ortogonale.
% Apelul: T=JQ_tridiagonal(T)
%
% Dumitru Iulia, mai 2006.
%------------------------------------------------------------

[n,m]=size(T);

%analizam daca matricea e patratica
```

```
if n~=m
    error('Matricea nu e patratica');
end
for i=1:n-2
    for j=i+2:n
        if T(i,j)~=0
            error('Matricea nu e tridiagonala')
        end
    end
end
for i=3:n
    for j=1:i-2
        if T(i,j)~=0
            error('Matricea nu e tridiagonala')
        end
    end
end
for k=1:n-1
    rho=sqrt(T(k,k)*T(k,k)+T(k+1,k)*T(k+1,k));
    c=T(k,k)/rho;
    s=-T(k+1,k)/rho;
    T(k,k) =rho;
    T(k+1,k)=0;
    rho=T(k,k+1);
    T(k,k+1)=c*T(k,k+1)-s*T(k+1,k+1);
    T(k+1,k+1)=s*rho+c*T(k+1,k+1);
    if k<n-1
        T(k,k+2)=-s*T(k+1,k+2);
        T(k+1,k+2)=c*T(k+1,k+2);
    end
end
p=n;
for k=n:-1:3
    max=1;
    if max<p-2
    max=p-2;
    end
    p=max;
    for i=p:k-2
        rho=sqrt(T(i,k)*T(i,k)+T(i+1,k)*T(i+1,k));
        c=T(i+1,k)/rho;
        s=T(i,k)/rho;
        T(i,k) =0;
        T(i+1,k)=rho;
        T(i+1,i)=s*T(i,i);
```

```
            T(i,i)=c*T(i,i);
            for j=i+1:k-1
                tau=T(i,j);
                T(i,j)=c*T(i,j)-s*T(i+1,j);
                T(i+1,i)=s*tau + c*T(i+1,j);
            end
            rho=sqrt(T(i+1,i)*T(i+1,i)+T(i+1,i+1)*T(i+1,i+1));
            c=T(i+1,i+1)/rho;
            s=T(i+1,i)/rho;
            T(i+1,i)=0;
            T(i+1,i+1)=rho;
            max=1;
            if max<p-2
            max=p-2;
            end
            q=max;
            for l=q:i
                tau=T(l,i);
                T(l,i)=T(l,i)*c-T(l,i+1)*s;
                T(l,i+1)=tau*s+T(l,i+1)*c;
            end
        end
    end
```

```
function [A]=JQ_triunghiular(A);
%------------------------------------------------------------------
% Se da o matrice patratica, superior triunghiulara A. Algoritmul ofera o
% reducere eficienta a matricei A la forma superior bidiagonala, folosind
% algoritmul JQ si transformarile ortogonale.
% Apelul: A=JQ_triunghiular(A);
%
% Dumitru Iulia, mai 2006.
%------------------------------------------------------------------

[n,m]=size(A);

%analizam daca matricea e patratica
if n~=m
    error('Matricea nu e patratica');
end

for i=1:n
    for j=1:n
        if i>j
            if A(i,j)~=0
                error('Matricea nu este superior trunghiulara');
```

```
            end
        end
    end
end

for k=n:-1:3
    for i=1:k-2
        rho=sqrt(A(i,k)*A(i,k)+A(i+1,k)*A(i+1,k));
        c=A(i+1,k)/rho;
        s=A(i,k)/rho;
        A(i,k) =0;
        A(i+1,k)=rho;
        A(i+1,i)=s*A(i,i);
        for j=i+1:k-1
            tau=A(i,j);
            A(i,j)=c*A(i,j)-s*A(i+1,j);
            A(i+1,i)=s*tau + c*A(i+1,j);
        end
        rho=sqrt(A(i,k)*A(i,k)+A(i+1,k)*A(i+1,k));
        c=A(i+1,i)/rho;
        s=A(i+1,i+1)/rho;
        A(i+1,i)=0;
        A(i+1,i+1)=rho;
        for l=1:i
            tau=A(l,i);
            A(l,i)=A(l,i)*c+A(l,i+1)*s;
            A(l,i+1)=-tau*s+A(l,i+1)*s;
        end
    end
end
```