Laborator 6

Proceduri numerice de analiză sistemică

6.1 Tema

Elaborarea, implementarea şi testarea procedurilor de analiză numerică a proprietăţilor sistemice fundamentale (stabilitate, controlabilitate şi observabilitate, etc.).

6.2 Teste numerice de stabilitate a sistemelor liniare

Stabilitatea unui sistem liniar $S = (A, B, C)$ este o proprietate ce depinde numai de matricea A. Mai precis, sistemul S este *stabil* dacă matricea de tranziţie $\Phi(t)$ asociată lui A satisface condiţia $\Phi(t) \to 0$ când $t \to \infty$. Deoarece matricea de tranziţie are expresii diferite în cazurile continuu şi discret, adică $\Phi(t) = e^{tA}$, $t \in \mathcal{R}$, respectiv $\Phi(t) = A^t$, $t \in \mathcal{N}$, proprietatea de stabilitate are şi ea exprimări diferite în cele două cazuri.

Definiţia 6.1 *Matricea A a unui sistem continuu este* stabilă *dacă toate valorile proprii ale lui A au partea reală strict negativă, deci sunt plasate în* semiplanul stâng deschis $\mathcal{C}^-$ *al planului complex $\mathcal{C}$.*

Pe scurt, criteriul (condiţia necesară şi suficientă) de stabilitate în cazul continuu este $\lambda(A) \subset \mathcal{C}^-$ sau, mai sugestiv, $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$.

Definiţia 6.2 *Matricea A a unui sistem discret este* stabilă *dacă toate valorile proprii ale lui A au modul strict subunitar, deci sunt plasate în* discul unitate deschis $\mathcal{D}_1(0)$ *din planul complex $\mathcal{C}$.*

Pe scurt, criteriul de stabilitate în cazul discret este $|\lambda(A)| < 1$.

Deoarece în ambele cazuri, continuu şi discret, proprietatea de stabilitate vizează o anumită plasare a valorilor proprii, iar acestea se calculează eficient utilizând algoritmul **QR**, obţinem următorul test de stabilitate pentru sisteme liniare.

Algoritmul 6.1 (Dată o matrice pătrată A şi variabila şir de caractere *tip*, algoritmul testează stabilitatea matricei A).

1. $\lambda = \mathbf{eig}(A)$ % Se calculează valorile proprii $\lambda(A)$ utilizând algoritmul QR (fără acumularea transformărilor).

2. `Dacă` *tip*='continuu' `atunci`
    1. Se determină $\alpha = \max \mathrm{Re}\lambda(i)$.
    2. `Dacă` $\alpha < 0$ `atunci`
        1. `Tipăreşte` 'Sistemul continuu este stabil'
           altfel
        2. `Tipăreşte` 'Sistemul continuu este stabil'
3. `Dacă` *tip*='discret' `atunci`
    1. Se determină $\rho = \max|\lambda(A)|$.
    2. `Dacă` $\rho < 1$ `atunci`
        1. `Tipăreşte` 'Sistemul discret este stabil.'
           `altfel`
        2. `Tipăreşte` 'Sistemul discret este instabil.'

6.3 Teste numerice de controlabilitate şi observabilitate a sistemelor liniare

Un sistem liniar $S = (A, B, C)$ este *controlabil* dacă orice tranziţie de stare dorită poate fi realizată prin alegerea adecvată a funcţiei de intrare. Prin urmare, controlabilitatea sistemului liniar S este o proprietate ce depinde numai de perechea (A, B).

Introducând matricea de controlabiltate R, definită de

$$R = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right], \tag{6.1}$$

avem următoarea definiţie, valabilă atât pentru sistemele continue cât şi pentru cele discrete.

Definiţia 6.3 *Perechea* (A, B) *este* controlabilă *dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{rang} R = n. \tag{6.2}$$

Dacă perechea (A, B) are o singură intrare, deci $m = 1$, atunci R este pătrată şi condiţia ca perechea (A, B) să fie controlabilă se reduce la condiţia ca matricea de controlabilitate R să fie nesingulară.

Un sistem liniar $S = (A, B, C)$ este *observabil* dacă starea iniţială este unic determinată cunoscând funcţiile de intrare şi ieşire, obţinute e.g. prin măsurători efectuate la terminalele lui S. Deci, observabilitatea sistemului liniar S depinde numai de perechea (C, A).

Introducând matricea de observabilitate

$$Q = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array}\right], \tag{6.3}$$

avem următoarea definiţie, valabilă atât pentru sistemele continue cât şi pentru cele discrete.

Definiţia 6.4 *Perechea* (C, A) *este* observabilă *dacă şi numai dacă este satisfăcută condiţia de rang*

$$\mathrm{rang}\, Q = n. \tag{6.4}$$

Examinând în paralel relaţiile de mai sus, concludem că noţiunile de controlabilitate şi observabilitate sunt *duale*, în sensul că ele se corespund prin corespondenţa

$$A \leftarrow A^T, \quad C \leftarrow B^T,$$

în particular avem

$$Q(C, A) = R^T(A^T, C^T).$$

În consecinţă, mai departe vom prezenta procedurile de calcul asociate controlabilităţii, rămânând ca dualele lor să fie formulate "prin dualitate".

În general procedurile de testare a controlabilităţii unei perechii date (A, B) sunt de două tipuri.

a) Proceduri, numite ad-hoc *elementare*, testează controlabilitatea perechii (A, B) utilizând direct definiţia 6.3. Aceste proceduri sunt, în general, neeficiente şi pot fi aplicate cu succes numai pentru perechi de dimensiuni mici.

b) Proceduri care utilizează transformări de asemănare pentru a aduce perechea iniţială (A, B) la o formă "simplă", pe care proprietatea de controlabilitate să poată fi testată direct ("prin inspecţie"). Aceste proceduri, numite în continuare *de transformare*, sunt cele mai utilizate în aplicaţii, cu atât mai mult cu cât ele facilitează şi rezolvarea altor probleme de calcul conexe vizând, de exemplu, descompunerea controlabilă, testarea stabilizabilităţii, alocarea polilor etc. Cea mai eficientă procedură de transformare constă în aducerea perechii (A, B) la forma (superior) Hessenberg prin transformări de asemănare ortogonale.

6.3.1 Teste elementare de controlabilitate

Din clasa procedurilor elementare face parte în primul rând procedura "directă", bazată pe construcţia matricei de controlabilitate R şi testarea condiţiei de rang (6.2).

Construcţia matricei R se face recurent. Pentru a obţine relaţia de recurenţă fie

$$R_k = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{k-1}B].$$

Relaţiile care leagă doi termeni succesivi R_k şi R_{k+1} rezultă din partiţiile avem

$$R_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{c|cccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^kB \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & AR_k \end{array}\right], \tag{6.5}$$

respectiv

$$R_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} B & AB & \cdots & A^{k-1}B & A^kB \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_k & B_{k+1} \end{array}\right], \tag{6.6}$$

unde submatricea $B_{k+1} = A^kB$, formată din ultimele m coloane ale lui R_{k+1}, rezultă în funcţie de submatricea corespunzătoare B_k a lui R_k prin relaţia evidentă

$$B_{k+1} = AB_k, \quad k \geq 1 \tag{6.7}$$

iar $B_1 = B$.

Se constată imediat că procedura de construcţie a matricei R bazată pe relaţia (6.5) este relativ neeconomică, întrucât necesită efectuarea produselor AR_k, unde matricea R_k are mk coloane, $k \geq 1$, în timp ce procedura bazată pe relaţia (6.6) necesită efectuarea produselor AB_k, unde la fiecare pas $k \geq 1$ matricea B_k are numai m coloane. De asemenea, este clar că la fiecare pas matricea B_k este disponibilă în R_k, mai precis avem

$$B_k = R_k(: , (k-1)m + 1 : km) \tag{6.8}$$

astfel încât nu este necesară nici alocarea unui tablou suplimentar de lucru pentru memorarea matrice curente B_k, nici calculul pe loc în B, conform schemei $B \leftarrow AB$, al termenilor şirului B_k, ceea ce ar implica distrugerea matricei iniţiale B.

În rezumat, procedura de testare a controlabilităţii perechii (A, B) poate fi formulată astfel.

Algoritmul 6.2 (Se testează controlabilitatea perechii (A, B) construind matricea de controlabilitate R).

1. $R(: , 1 : m) \leftarrow B_1 = B$
2. `Pentru` $k = 2 : n$
   1. $R(: , (k-1)m + 1 : km) \leftarrow B_k = AB_{k-1}$
3. Se calculează $r = \text{rang} R$ utilizând algoritmul DVS.
4. `Dacă` $r = n$ `atunci`
   1. `Tipăreşte` "Perechea (A, B) este controlabilă."
      `altfel`
      `Tipăreşte` "Perechea (A, B) nu este controlabilă."

În general, în ciuda simplităţii sale, algoritmul 6.2 *nu este recomandabil* întrucât matricea R este de mari dimensiuni iar calculul coloanelor sale la pasul 2.1 implică riscuri la efectuarea testului de rang de la pasul 3.

Teste elementare de observabilitate

În general, dacă o procedură **proc** calculează un rezultat $R = \textbf{proc}(A, B)$ privind controlabilitatea perechii (A, B) atunci rezultatul dual Q, privind observabilitatea perechii (C, A), se obţine cu secvenţa

1. $R_d = \textbf{proc}(A^T, C^T)$
2. $Q = R_d^T$

De exemplu, dacă $\textbf{proc}(A, B)$ este algoritmul 6.2, care produce matricea de controlabilitate R a perechii (A, B), atunci secvenţa de mai sus produce matricea de observabilitate Q a perechii (C, A).

6.3.2 Forma Hessenberg controlabilă

Considerăm sistemul liniar $S = (A, B, C)$ şi fie $\tilde{S} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ un sistem *asemenea* cu S, având matricele

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \tag{6.9}$$

unde $T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ este o matrice nesingulară arbitrară. Între matricele de controlabilitate şi observabilitate ataşate sistemelor S şi $\tilde{S}$ există următoarele relaţiile

$$\tilde{R} = TR, \quad \tilde{Q} = QT^{-1}. \tag{6.10}$$

Rezultă că matricele R şi $\tilde{R}$ au acelaşi rang, deci perechile (A, B) şi $(\tilde{A}, \tilde{B})$ sunt simultan controlabile sau necontrolabile. În mod similar, perechile (C, A) şi $(\tilde{C}, \tilde{A})$ sunt simultan observabile sau neobservabile. Pe scurt, proprietăţile de controlabilitate şi observabilitate sunt invariante în raport cu transformările de asemănare.

Dacă în (6.9) presupunem că matricea $T = U$ este ortogonală, deci sistemele S şi $\tilde{S}$ sunt *ortogonal asemenea*

$$\tilde{A} = UAU^T, \quad \tilde{B} = UB, \quad \tilde{C} = CU^T, \tag{6.11}$$

atunci relaţiile (6.10) devin

$$\tilde{R} = UR, \quad \tilde{Q} = QU^T. \tag{6.12}$$

În cele ce urmează vom descrie procedurile de aducere a perechii (A, B) la o formă simplă utilizând transformările de asemănare ortogonală, cu scopul identificării invarianţilor (ortogonali ai) acestei perechi şi, în particular, al testării controlabilităţii acesteia.

În consecinţă, vom considera o pereche (A, B) cu m intrări, nu neapărat controlabilă, şi pentru claritate vom discuta succesiv cazurile $m = 1$ şi $m > 1$. Peste tot vom presupune $B \neq 0$ şi vom nota

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang} R, \quad \bar{r} \stackrel{\text{def}}{=} n - r, \tag{6.13}$$

unde evident r satisface inegalitatea $1 \leq r \leq n$.

Cazul $m = 1$

În cazul unei perechi (A, b) de ordin n cu o singură intrare, forma "simplă", rezultată prin aplicarea transformării (6.11), se numeşte *forma superior Hessenberg* şi este definită prin

$$\tilde{A} = UAU^T = \begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{\phantom{A_{R\bar{R}}}}^{\bar{r}} \\ \end{array} \hspace{-6em} \left[\begin{array}{cc} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}\bar{r} \end{array}, \qquad \tilde{b} = Ub = \left[\begin{array}{c} b_R \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}\bar{r} \end{array} \tag{6.14}$$

în care perechea (A_R, b_R) de ordin r se află în forma superior Hessenberg ireductibilă

$$A_R = \left[\begin{array}{ccccc} x & x & \dots & x & x \\ h_2 & x & \dots & x & x \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & x & \vdots \\ & & & h_r & x \end{array}\right], \quad b_R = \left[\begin{array}{c} h_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right], \tag{6.15}$$

unde

$$h_i \neq 0, \quad i = 1 : r \tag{6.16}$$

iar x denotă elemente a căror valoare numerică nu are importanţă în context.

Dacă perechea iniţială (A, b) este *controlabilă* atunci în (6.14) avem $r = n$, astfel încât blocurile $A_{\bar{R}}$ şi $A_{R\bar{R}}$ dispar iar perechea $(\tilde{A}, \tilde{b}) = (A_R, b_R)$ are structura ireductibilă (6.15) cu $r = n$, adică

$$\tilde{A} = UAU^T = \left[\begin{array}{ccccc} x & x & \dots & x & x \\ h_2 & x & \dots & x & x \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & x & \vdots \\ & & & h_n & x \end{array}\right], \quad \tilde{b} = Ub = \left[\begin{array}{c} h_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right], \tag{6.17}$$

unde

$$h_i \neq 0, \quad i = 1 : n. \tag{6.18}$$

De aceea, structura ireductibilă din (6.17) se numeşte *forma superior Hessenberg controlabilă* a perechii (A, b).

Pe de altă parte, dacă perechea $(\tilde{A}, \tilde{b})$ are forma (6.17), nu neapărat ireductibilă, iar $k \geq 2$ este primul întreg pentru care $h_k = 0$, atunci această pereche admite evident o descompunere (deflaţie) de tip (6.14), în care $r = k - 1$. În acest sens, mai departe vom spune că structura (6.17), în general reductibilă, constituie *forma superior Hessenberg* (completă) a perechii (A, b).

În consecinţă avem următorul rezultat important.

Propoziţia 6.1 *O pereche (A, b) este controlabilă dacă şi numai dacă există o matrice ortogonală U astfel încât perechea $(\tilde{A}, \tilde{b})$ are forma (6.17) şi este satisfăcută condiţia (6.18).*

În rezumat, sunt posibile două cazuri:

1. Perechea (A, b) este controlabilă, deci $r \overset{\text{def}}{=} \text{rang}R = n$.
În acest caz perechea (A, b) este ortogonal asemenea cu o pereche $(\tilde{A}, \tilde{b})$ în forma superior Hessenberg controlabilă (6.17), (6.18).

2. Perechea (A, b) nu este controlabilă, deci $r \overset{\text{def}}{=} \text{rang}R < n$.
În acest caz perechea (A, b) este ortogonal asemenea cu o pereche $(\tilde{A}, \tilde{b})$ în forma bloc superior triunghiulară (6.14), în care perechea (A_R, b_R) este controlabilă de ordin r, deci are structura (6.15), (6.16). (În particular, (6.14) poate coincide cu forma superior Hessenberg completă (6.17), în care r este cel mai mic întreg ≥ 1 astfel încât $h_{r+1} = 0$).

Aducerea unei perechi (A, b) cu o singură intrare la forma superior Hessenberg completă (6.17) se face printr-o procedură directă, a cărei schemă de calcul este următoarea.

1. Se determină un reflector $U_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ astfel încât ultimele $n-1$ componente ale vectorului $b \leftarrow U_1 b$ să fie nule.

2. $A \leftarrow U_1 A U_1$.

3. $[A, U] = \texttt{hess}(A, U_1)$ unde funcţia MATLAB `hess` aduce matricea A la forma superior Hessenberg $A \leftarrow \tilde{A} = \tilde{U} A \tilde{U^T}$, prin transformări ortogonale de asemănare (vezi algoritmul **HQ** din cursul de Calcul Numeric).

Pentru a transforma schema de calcul de mai sus într-un algoritm implementabil vom introduce trei funcţii de calcul cu reflectori, a căror justificare se poate găsi în cursul de Calcul Numeric.

1. Procedura **H0** de calcul a elementelor definitorii ale reflectorului U_1, definit prin $U_1 = I_n - \frac{u_1 u_1^T}{\beta_1}$, astfel încât $(U_1 b)(2 : n) = 0$ şi calculul $b \leftarrow U_1 b$.

Procedura $U = \textbf{H0}(b)$

1. $\sigma = sgn(b_1)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}$
2. $u_{11} = b_1 + \sigma; \quad u_{i1} = b_i, \quad i = 2 : n$
3. $\beta_1 = \sigma u_{11}$
4. $b_1 \leftarrow h_1 = -\sigma; \quad b_i = 0, \quad i = 2 : n$

2. Procedura **H1** de premultiplicare a unei matrice cu un reflector U_1.

Procedura $A = \textbf{H1}(U, A)$

1. `Pentru` $j = 1 : n$
   1. $\tau = (\sum_{i=1}^{n} u_{i1} a_{ij})/\beta_1$
   2. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \tau u_{i1}, \quad i = 1 : n.$

3. Procedura **H2** de postmultiplicare a unei matrice cu un reflector U_1.

Procedura $A = \mathbf{H2}(A, U)$

1. `Pentru` $i = 1 : n$
   1. $\tau = (\sum_{i=1}^{n} u_{i1} a_{ji})/\beta_1$
   2. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \tau u_{j1}, \;\; j = 1 : n$.

În rezumat, procedura de aducere a perechii (A, b) cu o singură intrare la forma superior Hessenberg completă poate fi formulată astfel.

1. $U_1 = \mathbf{H0}(b)$.
2. $A = \mathbf{H1}(U_1, A); \quad A = \mathbf{H2}(A, U_1)$.
3. `Pentru` $k = 2 : n - 1$
   1. $U_k = \mathbf{H0}(A(k : n, k - 1))$.
   2. $A(k : n, k : n) = \mathbf{H1}(U_k, A(k : n, k : n))$;
      $A(: , k : n) = \mathbf{H2}(A(:, k : n), U_k)$

Construcţia matricei ortogonale $U = U_{n-1} \cdots U_2 U_1$ din (6.17), i.e. acumularea transformărilor, se face după schema

1. $U = U_1$
2. Pentru $k = 2 : n - 1$
   1. $U(k : n, 1 : n) = \mathbf{H1}(U_k, U(k : n, 1 : n))$.

În practică, se preferă deseori obţinerea formei superior Hessenberg (6.14),(6.15),(6.16), ceea ce presupune testarea condiţiei $\|\bar{b}_k\| \neq 0$ înainte de parcurgerea etapei k, $k = 2 : n - 1$. Se obţine următoarea procedură de calcul.

Algoritmul 6.3 (Construieşte forma superior Hessenberg (6.14), (6.15), (6.16) a unei perechi (A, b) de ordin n cu o singură intrare şi acumulează transformările. Se presupune $b \neq 0$).

1. $k = 1$
2. $U_1 = \mathbf{H0}(b)$
3. $A = \mathbf{H1}(U_1, A), \quad A = \mathbf{H2}(A, U_1)$
4. $U = U_1$
5. CONTINUĂ='da'
6. `Cât timp` CONTINUĂ='da'
   1. $r = k$
   2. `Dacă` $k = n$
      `atunci`
      1. CONTINUĂ ='nu',
      2. `tipăreşte` "Perechea (A, b) este controlabilă"

      `altfel`
      1. $g = A(k + 1 : n, k)$
      2. `Dacă` $\|g\| = 0$
         `atunci`

1. CONTINUĂ ='nu'

`altfel`

1. $k \leftarrow k+1$ % Etapa $k, k \geq 2$
2. $U_k = \mathbf{H0}(g)$
3. $A(k:n, k:n) = \mathbf{H1}(U_k, A(k:n, k:n))$,
   $A(:, k:n) = \mathbf{H2}(A(:, k:n), U_k)$
4. $U(k:n, 1:n) = \mathbf{H1}(U_k, U(k:n, 1:n))$

CONTINUĂ este o variabilă logică ce determină avansarea contorului de etapă k. În final, variabila r furnizează rangul matricei de controlabilitate R a perechii date (A, b).

Cazul $m > 1$

În cazul unei perechi (A, B) de ordin n cu m intrări, $m \geq 1$, procedura de transformare are la bază următorul rezultat general.

Propoziţia 6.2 (Lema de deflaţie controlabilă). *Oricare ar fi perechea (A, B) cu $rang B = r_1 > 0$, există o matrice ortogonală $U_1 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ astfel încât*

$$A \leftarrow \tilde{A} = U_1 A U_1^T = \begin{bmatrix} A_1 & X \\ G & F \end{bmatrix}, \quad B \leftarrow \tilde{B} = U_1 B = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

unde matricea $H_1 \in \mathcal{R}^{r_1\times m}$ este epică, i.e. $rang H_1 = r_1$. Mai mult, perechea (A, B) este controlabilă dacă şi numai dacă perechea redusă (F, G), de ordin $n - r_1 < n$, este controlabilă.

Matricea U_1 se determină e.g. aplicând lui B procedura de descompunere a valorilor singulare (**DVS**). Avem

$$U_1 B V = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

unde U_1 şi $V \in \mathcal{R}^{m\times m}$ sunt ortogonale iar Σ_1 este diagonală de ordin $r_1 > 0$ cu elementele diagonale pozitive. Partiţionând $V = [V_1 \; V_2]$, unde V_1 are r_1 coloane, obţinem

$$\tilde{B} = U_1 B = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 V_1^T \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde $H_1 = \Sigma_1 V_1^T$ este evident epică de rang r_1.

După determinarea lui U_1 se aplică U_1 lui A, i.e. se calculează $\tilde{A} = U_1 A U_1^T$, şi în acord cu (6.19) se evidenţiază perechea redusă (F, G) de ordin $n - r_1$ cu r_1 intrări.

În ipoteza $G \neq 0$, perechii (F, G) cu $rang\, G = r_2 > 0$ i se poate aplica din nou o transformare de tip (6.19). Se obţine

$$F \leftarrow \tilde{F} = \bar{U}_2 F \bar{U}_2^T = \begin{bmatrix} A_2 & X \\ G_{nou} & F_{nou} \end{bmatrix}, \quad G \leftarrow \tilde{G} = \bar{U}_2 G = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} A \leftarrow \tilde{A} = U_2 A U_2^T &= \left[\begin{array}{c|cc} A_1 & X & X \\ \hline H_2 & A_2 & X \\ 0 & G_{nou} & F_{nou} \end{array}\right], \\ B \leftarrow \tilde{B} = U_2 B &= \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \end{aligned} \tag{6.21}$$

unde matricele $\bar{U}_2$ precum şi

$$U_2 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & \bar{U}_2 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

sunt ortogonale iar matricea H_2 este epică de rang r_2.

Forma finală a perechii (A, B), obţinută prin aplicarea repetată a procedurii de deflaţie descrisă în propoziţia 6.2, se numeşte *forma bloc-superior Hessenberg* şi este definită prin

$$A \leftarrow \tilde{A} = UAU^T = \begin{bmatrix} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{bmatrix}, \quad B \leftarrow \tilde{B} = UB = \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.23}$$

în care perechea (A_R, B_R), de ordin r, se găseşte în forma *bloc-superior Hessenberg controlabilă*

$$A_R = \begin{bmatrix} A_1 & X & \cdots & X & X \\ H_2 & A_2 & \cdots & X & X \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & H_k & A_k \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.24}$$

unde toate blocurile $H_i \in \mathcal{R}^{r_i \times r_{i-1}}$ sunt epice, i.e.

$$\mathrm{rang} H_i = r_i > 0, \quad i = 1 : k, \quad r_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} m. \tag{6.25}$$

Evident avem

$$r = \sum_{i=1}^{k} r_i \leq n \tag{6.26}$$

şi în virtutea condiţiilor (6.25) perechea (A_R, B_R) din (6.23) este controlabilă. Mai mult, perechea iniţială (A, B) *este controlabilă* dacă şi numai dacă $r = n$, i.e. $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A_R, B_R)$, şi în acest caz numărul k de blocuri din (6.24) coincide cu *indicele de controlabilitate* ν al lui (A, B).

Matricea ortogonală $U \in \mathcal{R}^{n \times n}$ din (6.23) rezultă prin acumularea transformărilor parţiale, i.e.

$$U = U_k \cdots U_2 U_1, \tag{6.27}$$

în care U_1 se determină ca în demonstraţia lemei 6.2, U_2 are forma (6.22) etc. Subliniem că în virtutea structurii lui U_2, premultiplicarea cu U_2 nu modifică primele r_1 linii, iar postmultiplicarea cu U_2^T nu modifică primele r_1 coloane ale matricei asupra căreia acţionează transformarea corespunzătoare. De asemenea, proprietăţi asemănătoare au toate matricele $U_i,\ i = 2 : k$ din (6.27).

În rezumat, aducerea pe loc a perechii iniţiale (A, B) la forma bloc-superior Hessenberg (6.23), (6.24) se face printr-o succesiune de transformări ortogonale de asemănare

$$A \leftarrow U_i A U_i^T, \quad B \leftarrow U_i B, \quad i = 1 : k. \tag{6.28}$$

La etapa $i = 1$ se operează asupra perechii iniţiale (A, B) ca în propoziţia 6.2, iar la etapele $i \geq 2$ se operează analog asupra perechii reduse corespunzătoare (F, G), conţinute în tabloul A. În particular, transformările $U_i,\ i \geq 2$ nu modifică forma lui B obţinută după prima etapă, deci pentru $i \geq 2$ relaţiile (6.28) se reduc la

$$A \leftarrow U_i A, \quad A \leftarrow A U_i^T. \tag{6.29}$$

Pentru a descrie precis algoritmul astfel obţinut, introducem, similar cu cazul $m = 1$, următoarele proceduri, a căror scriere explicită revine studenţilor (utilizând, la nevoie, funcţii MATLAB adecvate).

1. Procedura de reducere a lui B decrisă mai sus relativ la propoziţia 6.2, vezi relaţiile (6.19) şi (6.20), având sintaxa

$$[\, r_1, U_1, H_1 \,] = \mathbf{red}(B).$$

(Amintim că la etapele $i \geq 2$ procedura **red** se aplică unui bloc G, localizat în tabloul A).

2. Procedura de premultiplicare a unei matrice cu matricea de transformare curentă

$$A = \mathbf{mul1}(U_i, A).$$

3. Procedura de postmultiplicare a unei matrice cu matricea de transformare curentă

$$A = \mathbf{mul2}(A, U_i).$$

Acumularea transformărilor din (5.69) se face conform schemei

$$U \leftarrow U_i U, \quad i = 2 : k \tag{6.30}$$

cu iniţializarea $U = U_1$.

Avem următorul algoritm

Algoritmul 6.4 (Dată perechea (A, B) de ordin n cu m intrări şi $B \neq 0$ algoritmul construieşte forma bloc-superior Hessenberg (6.23), (6.24), (6.25) şi acumulează transformările. Perechea rezultată suprascrie pe cea iniţială).

1. $k = 1$
2. $[r_1, U_1, H_1] = \mathbf{red}(B)$
3. $A = \mathbf{mul1}(U_1, A), \quad A = \mathbf{mul2}(A, U_1)$
4. $U = U_1$
5. $r_v = 0, \quad r = r_1$
6. CONTINUĂ = 'da'
7. `Cât timp` CONTINUĂ = 'da'
    1. $\nu = k$
    2. `Dacă` $r = n$
       `atunci`
        1. CONTINUĂ = 'nu'
        2. `Tipăreşte` "Perechea (A, B) este controlabilă"

       `altfel`
        1. $G = A(r + 1 : n, r_v + 1 : r)$
        2. `Dacă` $\|G\| = 0$
           `atunci`
           1. CONTINUĂ = 'nu'

           `altfel`
           1. $k \leftarrow k + 1$ % (etapa k, $k \geq 2$)
           2. $[r_k, U_k, H_k] = \mathbf{red}(G)$
           3. $A(r + 1 : n, r + 1 : n) =$
              $\mathbf{mul1}(U_k, A(r + 1 : n, r + 1 : n)$,
              $A(1 : n, r + 1 : n) = \mathbf{mul2}(A(1 : n, r + 1 : n), U_k)$

4. $U(r+1:n,1:n) = \mathbf{mul1}(U_k, U(r+1:n,1:n))$
5. $r_v = r, \quad r \leftarrow r + r_k$

Având în vedere că numărul k al etapelor de reducere nu este apriori cunoscut, utilizăm şi aici variabila binară CONTINUĂ cu semnificaţia cunoscută. În final, variabila r furnizează rangul matricei de controlabilitate R a perechii date (A, B). În cazul $r = n$, i.e. dacă perechea (A, B) este controlabilă, algoritmul se opreşte la instrucţiunea 7.2. iar ν este indicele de controlabilitate. Din contră, dacă algoritmul se opreşte datorită faptului că blocul curent G este nul, atunci perechea (A, B) nu este controlabilă, iar perechea transformată $(\tilde{A}, \tilde{B})$, furnizată de algoritmul 6.4, are forma (6.23), în care $r < n$.

Forma Hessenberg observabilă

Pentru analiza proprietăţilor de observabilitate a unei perechi (C, A) de ordin n cu l ieşiri, $l \geq 1$, se procedează prin dualitate. Prin aplicarea schemei de dualizare relativ la algoritmul 6.4, se obţine *forma bloc-inferior Hessenberg* a perechii (C, A), definită prin

$$\begin{aligned} A \leftarrow \tilde{A} = UAU^T = & \begin{bmatrix} A_Q & 0 \\ A_{\bar{Q}Q} & A_{\bar{Q}} \end{bmatrix}, \\ C \leftarrow \tilde{C} = \quad CU^T = & \begin{bmatrix} C_Q & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6.31}$$

în care perechea (C_Q, A_Q) de ordin q se află în forma *bloc-inferior Hessenberg observabilă*

$$A_Q = \begin{bmatrix} A_1 & G_2 & & & \\ X & A_2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ X & X & \cdots & \ddots & G_k \\ X & X & \cdots & \cdots & A_k \end{bmatrix}, \quad C_Q = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.32}$$

unde toate blocurile $G_i \in \mathcal{R}^{q_{i-1} \times q_i}$ sunt monice, i.e.

$$\mathrm{rang} G_i = q_i > 0, \quad i = 1:k, \quad q_0 \overset{\mathrm{def}}{=} l. \tag{6.33}$$

Evident avem

$$q = \sum_{i=1}^{k} q_i \leq n \tag{6.34}$$

şi în virtutea condiţiilor (6.33) perechea (C_Q, A_Q) din (6.31) este observabilă. În plus, *perechea iniţială* (C, A) este *observabilă* dacă şi numai dacă $q = n$, i.e. $(\tilde{C}, \tilde{A}) = (C_Q, A_Q)$, şi în acest caz numărul k de blocuri din (6.32) coincide cu *indicele de observabilitate* al lui (C, A).

În sfârşit, la fel ca în cazul controlabilităţii, matricea ortogonală $U \in \mathcal{R}^{n \times n}$ din (6.31) rezultă din acumularea transformărilor parţiale, i.e. $U = U_k \cdots U_2 U_1$.

6.4 Calculul realizărilor minimale

Principalul rezultat al teoriei realizării sistemelor liniare afirmă că orice sistem $S = (A, B, C)$ este echivalent intrare-ieşire, i.e. are aceeaşi matrice de transfer, cu un sistem de ordin minim $S_m = (A_m, B_m, C_m)$ care este simultan controlabil şi observabil. Mai mult, sistemul S_m este determinat până la o transformare de asemănare şi, în esenţă, coincide cu partea simultan controlabilă şi observabilă a sistemului dat S.

Definiţia 6.5 *Un sistem $S_m = (A_m, B_m, C_m)$ controlabil şi observabil, echivalent intrare-ieşire cu S se numeşte* realizare minimală *a lui S.*

Mai general, orice sistem $S_m = (A_m, B_m, C_m)$ controlabil şi observabil se numeşte minimal.

În consecinţă, o realizare minimală (i.e. de ordin minim) a unei matrice de transfer date $T(s)$ poate fi construită aplicând următoarea procedură.

Algoritmul 6.5 (Construieşte o realizare minimală a matricei de transfer $T(s)$).

1. Se construieşte o realizare observabilă $S = (A, B, C)$ a lui $T(s)$, utilizând formele standard observabile, expuse în capitolul 3.
2. Se construieşte descompunerea controlabilă
$$\tilde{A} = UAU^T = \begin{bmatrix} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = UB = \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix},$$
utilizând algoritmul 6.4 şi se aplică transformarea U matricei C, i.e.
$$\tilde{C} = CU^T = [\, C_R \;\; C_{\bar{R}} \,].$$
3. Se reţine partea controlabilă $S_m = (A_R, B_R, C_R)$ a tripletului transformat, unde
$$A_R = \tilde{A}(1:r, 1:r), \quad B_R = \tilde{B}(1:r, :)$$
este partea controlabilă a perechii (A, B) iar
$$C_R = \tilde{C}(\,:, 1:r).$$

Programe MATLAB disponibile

Construcţia matricei de controlabilitate R a perechii (A, B) se face cu funcţia **ctrb**, care implementează algoritmul 6.2, mai precis versiunea acestuia bazată pe formula (6.5). Pentru construcţia formei bloc-superior Hessenberg a unei perechi (A, B) este disponibilă funcţia **ctrbf**. Construcţia unei realizări minimale se poate face utilizând funcţia **minreal**.

6.5 Sarcini de lucru

A. În laborator

1. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de testare numerică a stabilităţii unui sistem liniar (i.e. a matricei de stare A a acesteia) şi se va testa pe exemple numerice semnificative ($n > 5$).

2. Se vor scrie programele MATLAB pentru implementarea algoritmului de construcţie a matricei de controlabilitate şi de testare elementară a controlabilităţii unei perechi (A, B). Se vor compara soluţia calculată cu programul propriu cu cel oferit de funcţia MATLAB disponibilă.

3. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al formei Hessenberg complete a unei perechi (A, b) a unui sistem cu o singură intrare şi se va completa cu testarea controlabilităţii acestei perechi. Se va compara soluţia calculată cu programul propriu cu cea oferită de funcţia MATLAB disponibilă.

4. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al unei realizări minimale a unei perechi (A, b) a unui sistem cu o singură intrare şi o singură ieşire. Se va compara soluţia calculată cu programul propriu cu cea oferită de funcţia MATLAB disponibilă.

B. Acasă

1. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al formei Hessenberg complete a unei perechi (A, B) a unui sistem cu mai multe intrări şi se va completa cu testarea controlabilităţii acestei perechi.

2. Se va scrie programul MATLAB pentru implementarea algoritmului de calcul al unei realizări minimale a unui sistem (A, B, C) cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri. Se va compara soluţia calculată cu programul propriu cu cea oferită de funcţia MATLAB disponibilă.

3. Se vor analiza sursele funcţiilor MATLAB **ctrb** şi **ctrbf** şi **minreal** şi se vor identifica metodele folosite.

4. **Exerciţii şi teme de casă.**

E 6.1 Conform teoremei lui Liapunov, matricea A a unui sistem continuu (discret) este stabilă dacă şi numai dacă oricare ar fi matricea $Q = Q^T > 0$ ecuaţia matriceală algebrică Liapunov (discretă)

$$A^T X + XA = -Q \quad (A^T XA - X = -Q)$$

are o soluţie $X = X^T > 0$. Explicaţi de ce enunţul de mai sus (de mare valoare teoretică) nu conduce la un test de stabilitate numeric eficient în raport cu algoritmul 6.1.

E 6.2 Un polinom $p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$ este stabil (sau "hurwitzian") dacă toate rădăcinile sale au partea reală strict negativă. Scrieţi algoritmul de testare a stabilităţii polinomului $p(s)$ utilizând criteriul Routh-Hurwitz.

Indicaţie. Se utilizează algoritmul de eliminare gaussiană *fără pivotare* relativ la matricea Hurwitz asociată lui $p(s)$, ceea ce corespunde exact formulării propuse de Routh pentru criteriul în discuţie.

E 6.3 Scrieţi o realizare de stare $S = (A, b, c^T)$ a funcţiei de transfer $T(z) = N(z)/p(z)$ astfel încât $R(A, b) = I$. Idem, astfel încât $Q(c^T, A) = I$. În ce condiţii putem avea simultan $R(A, b) = Q(c^T, A) = I$?

E 6.4 Obţineţi condiţii suficiente simple de controlabilitate şi observabilitate a conexiunilor serie, paralel şi în circuit închis. Ce puteţi afirma despre stabilitatea acestor conexiuni ?

Bibliografie

[1] **Jora B., Popeea C., Barbulea S.** *Metode de Calcul Numeric în Automaticăa*, Ed. Enciclopedică, Bucureşti 1996.