

Prelucrarea avansată a semnalelor
Capitolul 1: Bancuri de filtre

Bogdan Dumitrescu

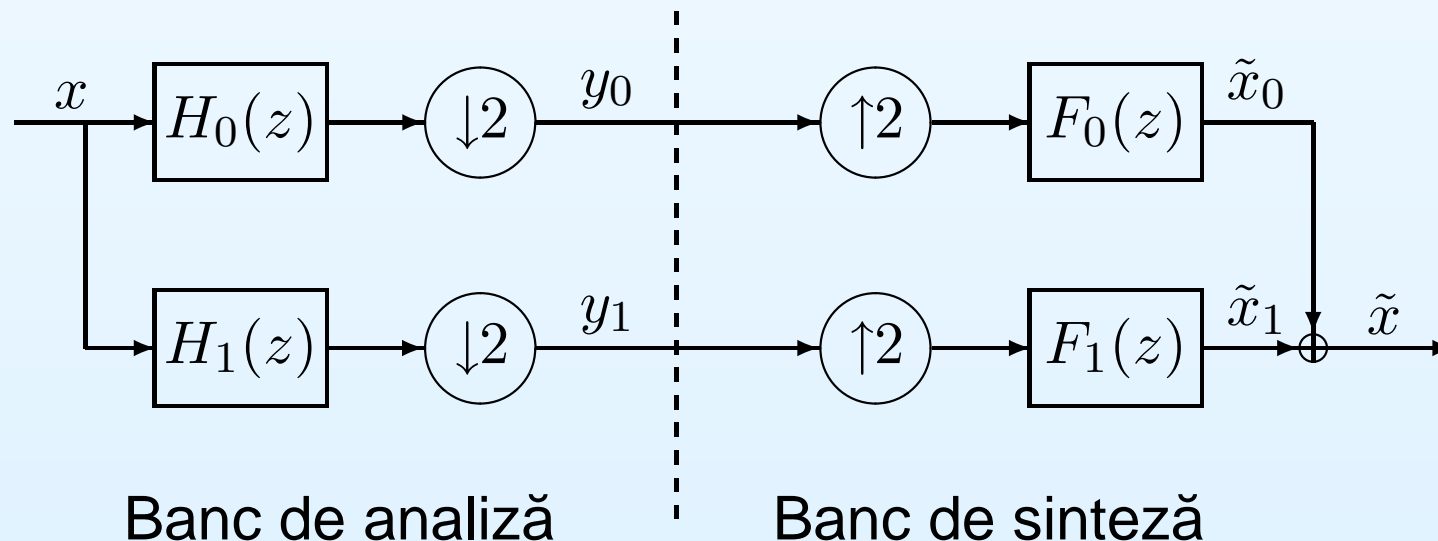
Facultatea de Automatică și Calculatoare
Universitatea Politehnica București

Cuprins

- Bancuri de filtre cu două canale
 - Decimare și interpolare
 - Identități remarcabile
 - Reprezentarea polifază
 - Reconstrucție perfectă
 - Bancuri de filtre ortogonale
 - Bancuri de filtre biortogonale
 - Lifting
 - Metode de proiectare
- Bancuri de filtre cu mai multe canale
 - Proprietăți generale
 - Bancuri de filtre modulate

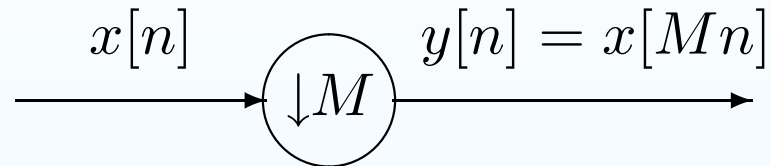
Obiectul principal de studiu

- Banc de filtre (BF) cu două canale
- Semnalul de intrare $x[n]$ este filtrat, apoi decimat
- Filtrul $H_0(z)$ este de obicei trece-jos, $H_1(z)$ trece-sus
- Semnale din sub-benzi, y_0 și y_1 , pot fi prelucrate (la început o să presupunem că nu sunt alterate)
- Bancul de sinteză face interpolare, apoi filtrare
- Ideal, ieșirea $\tilde{x}[n]$ este o versiune întârziată a intrării



Decimare

- *Decimatorul* cu factorul M efectuează operația



- Ieșirea păstrează doar fiecare al M -lea eșantion al intrării, eliminându-le pe celelalte
- Relația între transformatele Z ale intrării și ieșirii este

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(z^{1/M} w_M^\ell\right), \quad w_M = e^{-\frac{j2\pi}{M}} \quad (1)$$

- În cazul $M = 2$ se obține $Y(z) = \frac{1}{2} \left(X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right)$

Demonstrație (1)

- Relație elementară între rădăcinile de ordinul M ale unității

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} w_M^{-\ell n} = \sum_{\ell=0}^{M-1} e^{j2\pi\ell n/M} = \begin{cases} M, & \text{dacă } n \bmod M = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (2)$$

- Dacă $n \bmod M = 0$, atunci toți termenii din sumă sunt 1
- Altfel

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{j2\pi\ell n/M} = \frac{1 - e^{j2\pi n}}{1 - e^{j2\pi n/M}} = 0$$

Demonstrație (2)

- Termenul drept din (1) poate fi scris

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X \left(z^{1/M} w_M^\ell \right) &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^{1/M} w_M^\ell \right)^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n/M} \sum_{\ell=0}^{M-1} w_M^{-\ell n} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n/M} \delta[n \bmod M] \\ &\stackrel{n \leftarrow Mn}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn] z^{-n} \\ &= Y(z) \end{aligned}$$

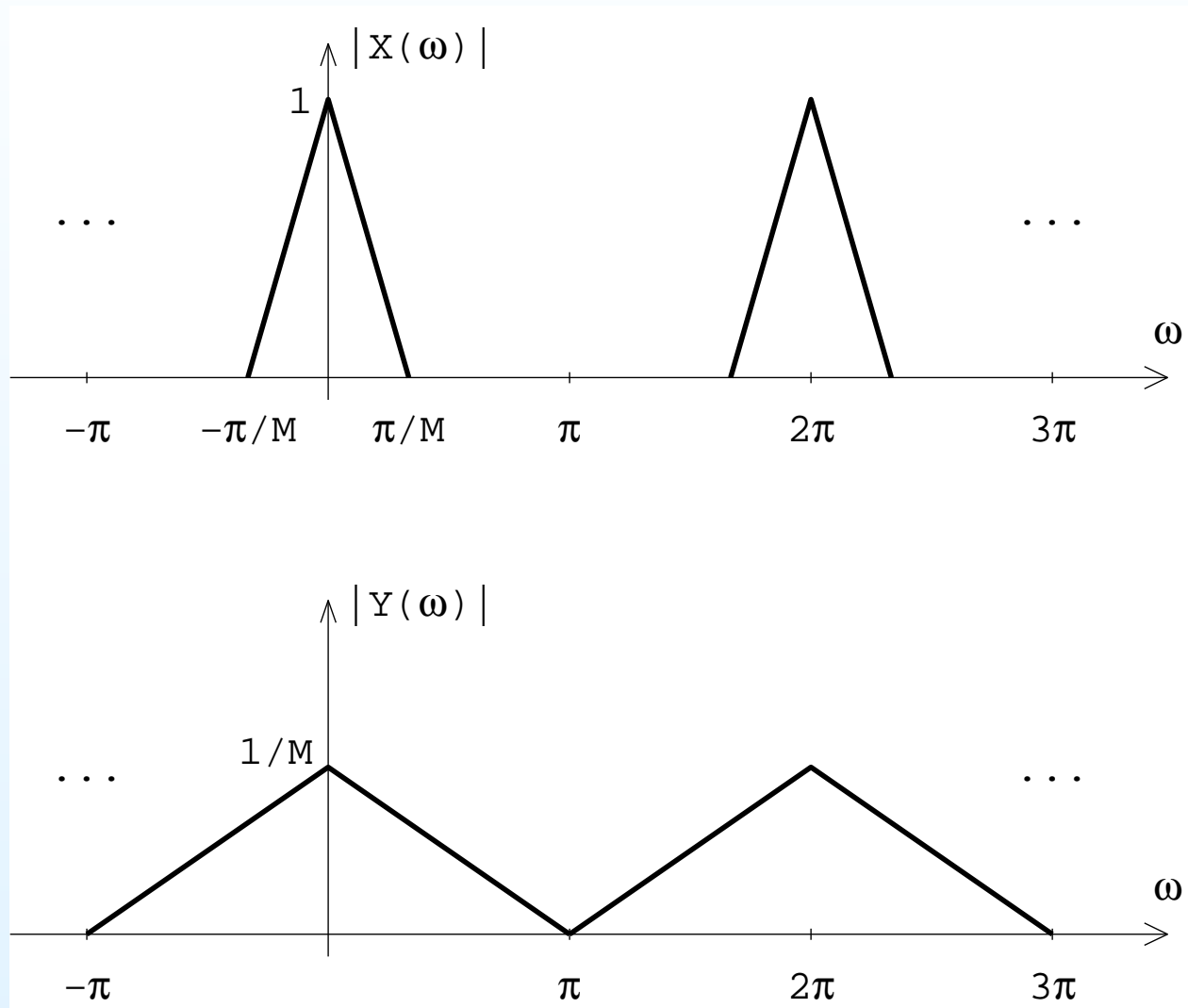
Decimare fără pierderi

- Presupunem că semnalul inițial are spectrul limitat la banda $[-\pi/M, \pi/M]$, deci $X(\omega) = 0$ pentru $\pi/M < |\omega| \leq \pi$
- Spectrul semnalului decimat este

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} X(\omega/M), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

- Spectrul semnalului decimat are aceeași formă ca spectrul semnalului inițial, dar expandată pe întreg intervalul $[-\pi, \pi]$
- Intuitiv, nu se pierde informație prin decimare
- Aceasta ar fi situația în bancurile de filtre, dacă filtrele ar fi ideale
- Problemă (cazul canalului pentru frecvențe înalte): luând $M = 2$, cum se transformă spectrul unui semnal pentru care $X(\omega) = 0$ pentru $|\omega| \leq \pi/2$?

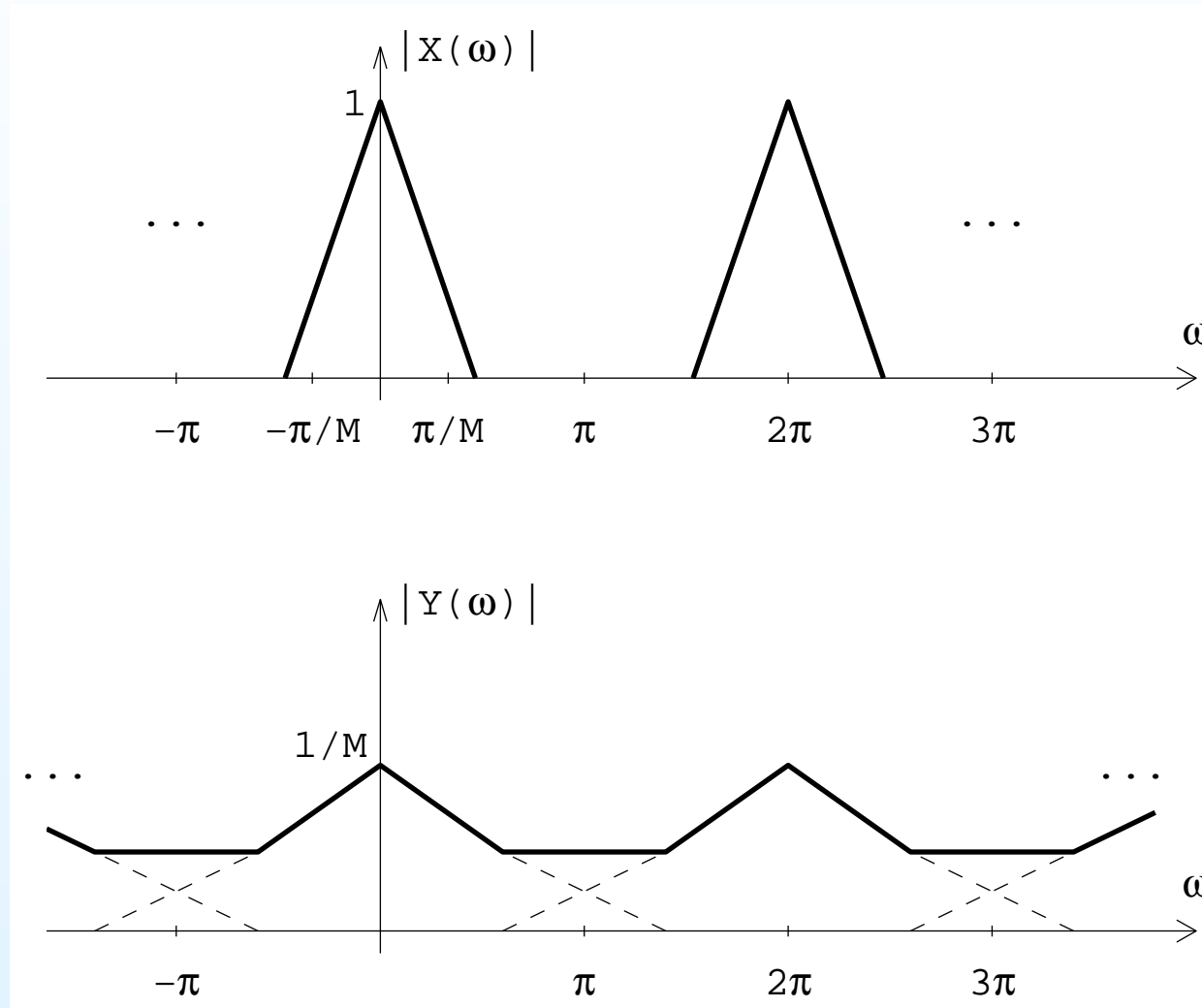
Decimare fără pierderi—exemplu



Aliere

- Dacă spectrul semnalului inițial se întinde dincolo de frecvența π/M , atunci spectrul semnalului decimat nu mai are aceeași formă ca spectrul semnalului inițial
- Spectrul semnalului decimat este suma unor porțiuni (expandate) ale spectrului inițial
- Apare fenomenul de *aliere*

Aliere—exemplu

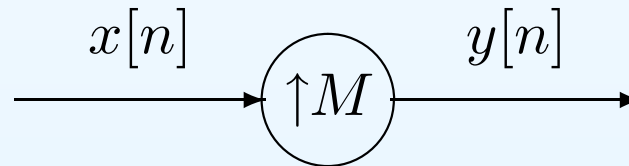


Interpolare

- *Interpolatorul* cu factorul M introduce $M - 1$ zerouri între fiecare două eșantioane ale semnalului de intrare

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & \text{dacă } n \bmod M = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Notăție uzuală



- Relația între transformatele Z ale intrării și ieșirii este

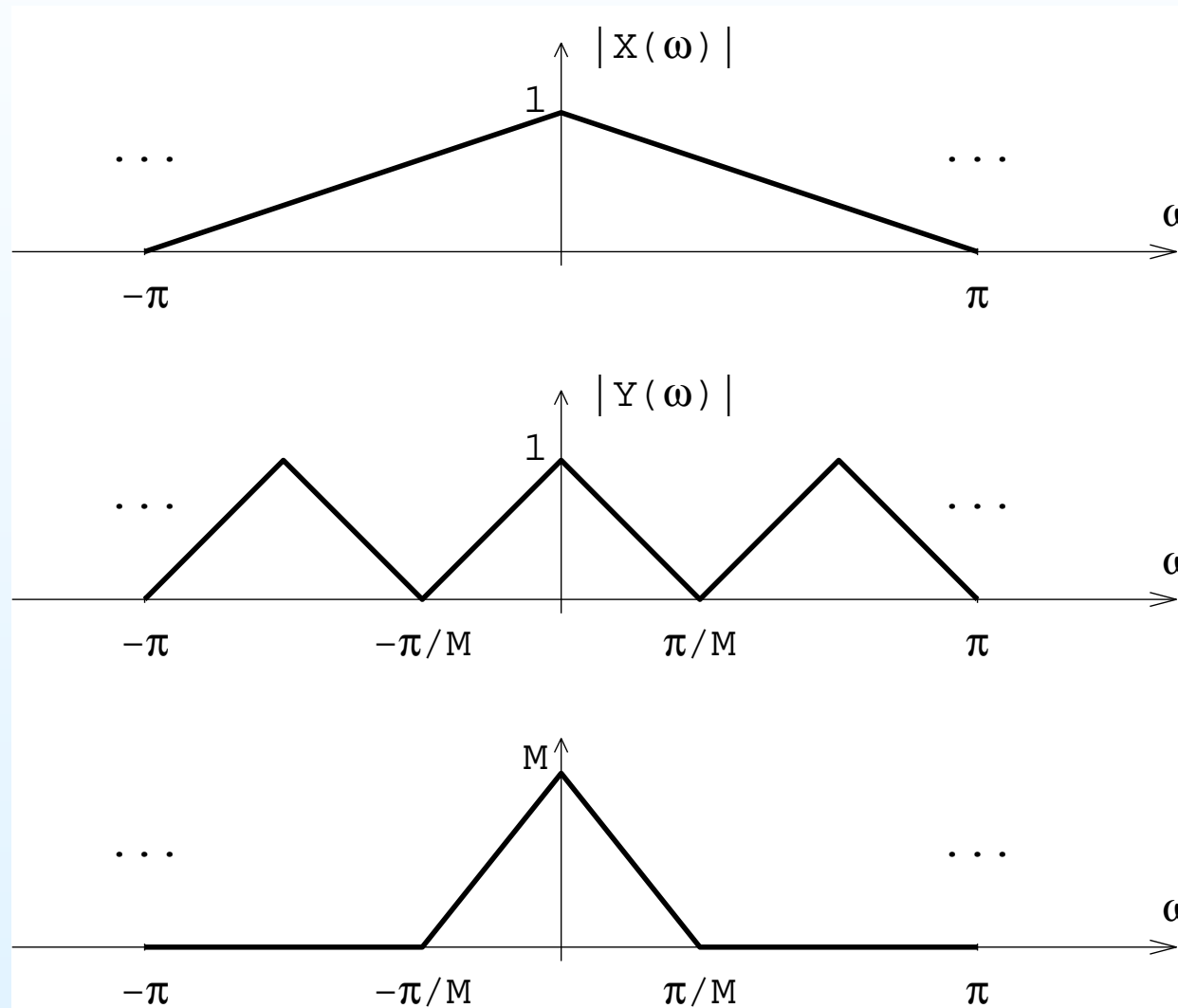
$$Y(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-Mk} = X(z^M)$$

Transformarea spectrului la interpolare

- Relația între spectre: $Y(\omega) = X(M\omega)$
- Pe intervalul $[-\pi, \pi]$, spectrul semnalului interpolat este obținut prin alăturarea a M copii (fiecare comprimată de M ori) ale unei perioade a spectrului semnalului inițial
- Fenomenul este numit replicare (engl. replication, imaging)
- Aplicarea unui filtru trece-jos (ca pe primul canal al BF) elimină replicile inutile

Transformarea spectrului la interpolare—exemplu

- Pentru $M = 3$:

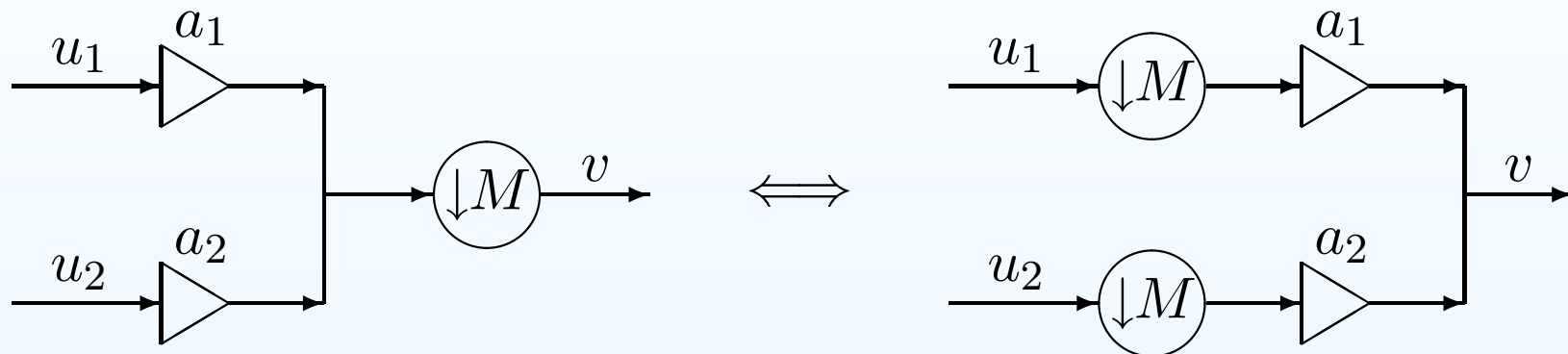


Ilustrarea în frecvență a funcționării BF cu două canale

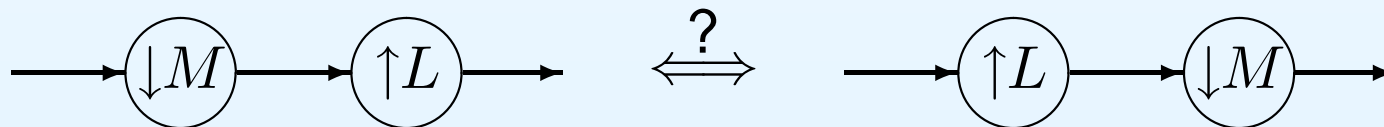
- Figura—la tablă !
- Dacă filtrele sunt ideale, atunci semnalele filtrate de $H_0(z)$ și $H_1(z)$ ocupă fiecare doar jumătate din spectru
- Decimarea cu 2 nu pierde informație
- (Numărul de eșantioane în sub-benzi este același cu al intrării, deci speram de la început să nu se piardă informație)
- Interpolarea extinde spectrul util din fiecare sub-bandă pe tot intervalul $[-\pi, \pi]$
- Filtrele ideale $F_0(z)$ și $F_1(z)$ păstrează doar jumătatea utilă, în intervalul de frecvență adecvat
- Prin sumare se reface spectrul inițial
- Întrebare naturală: ce se întâmplă dacă filtrele nu sunt ideale ?

Interconexiuni cu decimatoare și interpolatoare

- Superpoziție

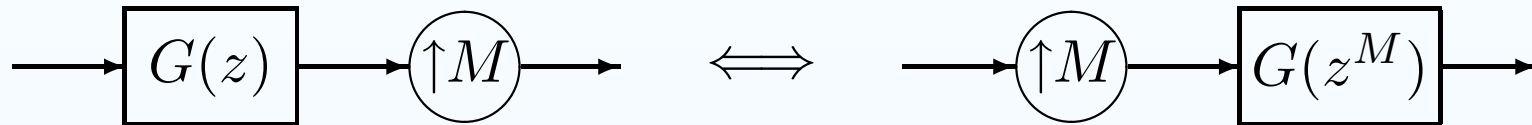


- Decimatorul cu factor M și interpolatorul cu factor L comută doar dacă M și L sunt coprimi (demonstrație !)



Identitățile nobile—interpolare

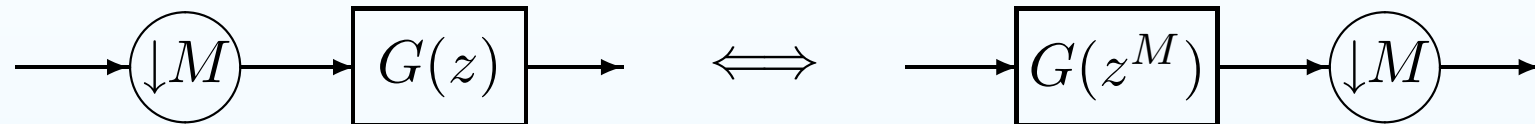
- Dacă $G(z)$ e o funcție de transfer oarecare, atunci



- Demonstrație: notăm u intrarea, v ieșirea
- În stânga, după filtrare se obține $G(z)U(z)$, deci
$$V(z) = G(z^M)U(z^M)$$
- În dreapta, după interpolare se obține $U(z^M)$, deci din nou
$$V(z) = G(z^M)U(z^M)$$
- Demonstrați folosind relațiile în timp !

Identitățile nobile—decimare

- În cazul decimării, ordinea se inversează:



- Demonstrație: notăm u intrarea, v ieșirea
- În stânga se obține (vezi (1))

$$V(z) = \frac{1}{M} G(z) \sum_{\ell=0}^{M-1} U \left(z^{1/M} w_M^\ell \right)$$

- În dreapta, obținem aceeași relație deoarece, aplicând (1) pentru $G(z^M)$ și ținând seama că $w_M^{\ell M} = 1$, rezultă

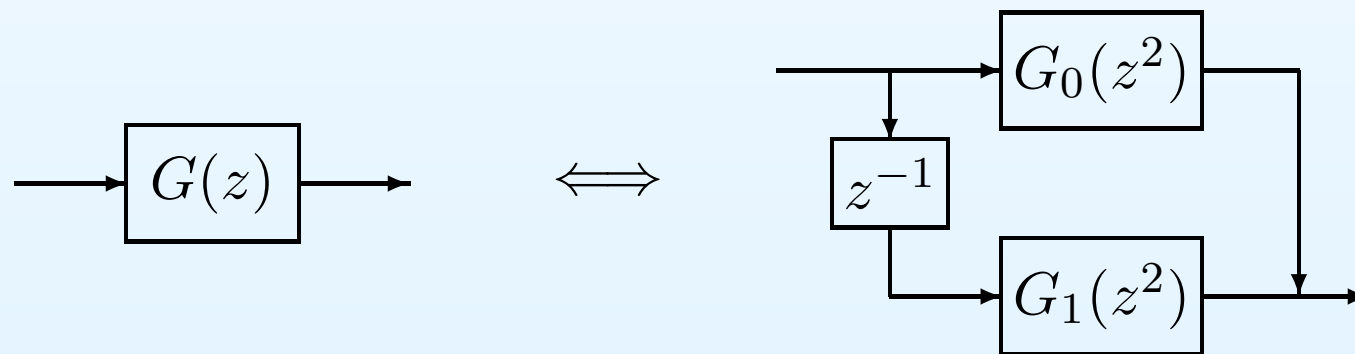
$$\frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} G \left(z w_M^{\ell M} \right) = G(z)$$

Reprezentarea polifază

- Considerăm $M = 2$
- Fie $G(z)$ un filtru, pe care îl scriem folosind componentele polifază

$$G(z) = G_0(z^2) + z^{-1}G_1(z^2)$$

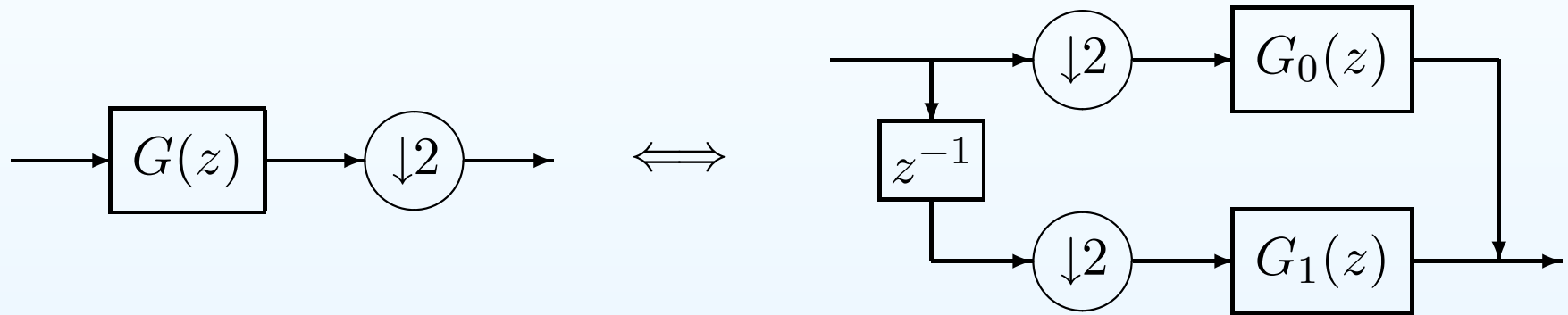
- Exemplu: dacă $G(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$, atunci $G_0(z) = 1 + 3z^{-1}$ și $G_1(z) = 2 + 4z^{-1}$
- Filtrul poate fi implementat prin schema echivalentă



- Deocamdată nu rezultă nici un avantaj, ba dimpotrivă

Reprezentarea polifază și decimarea

- Filtrarea unui semnal, urmată de decimare, poate fi realizată prin schema echivalentă



- Echivalența este imediată: sumarea comută cu decimarea, apoi se aplică identitatea nobilă pentru decimare, pe fiecare ramură a schemei de pe pagina precedentă ($G_0(z^2)$, respectiv $G_1(z^2)$, comută cu decimatorul, devenind $G_0(z)$, $G_1(z)$)

Avantaje

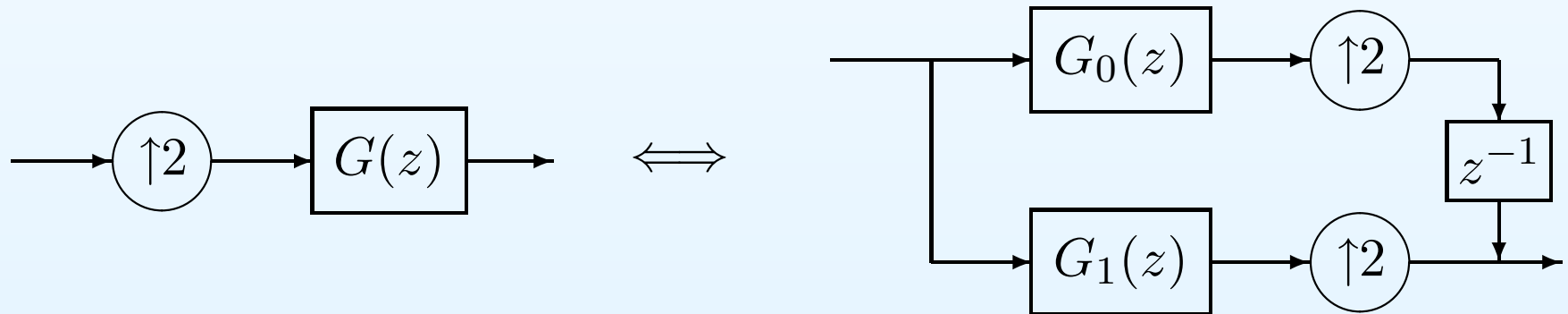
- Avantajul implementării polifază este că operațiile de filtrare se execută la frecvență de două ori mai mică, cu filtre mai scurte
- În plus, nu se fac operații inutile
- Atunci când decimarea avea loc după filtrare, jumătate din operațiile efectuate la filtrare erau inutile, din moment ce jumătate din eșantioane erau ignorate

Reprezentarea polifază și interpolarea

- La interpolare se folosește de obicei reprezentarea polifază de tip II (componentele polifază apar în ordine inversă)

$$G(z) = G_1(z^2) + z^{-1}G_0(z^2)$$

- Filtrarea unui semnal interpolat poate fi realizată prin schema echivalentă



- Demonstrația se face similar, pe baza comutativității și a identității nobile

BF cu două canale—reprezentare polifază

- Scriem filtrele BF cu două canale în reprezentare polifază
- Bancul de analiză, tip I

$$H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$$

$$H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1}H_{11}(z^2)$$

- Bancul de sinteză, tip II (atenție la indici !)

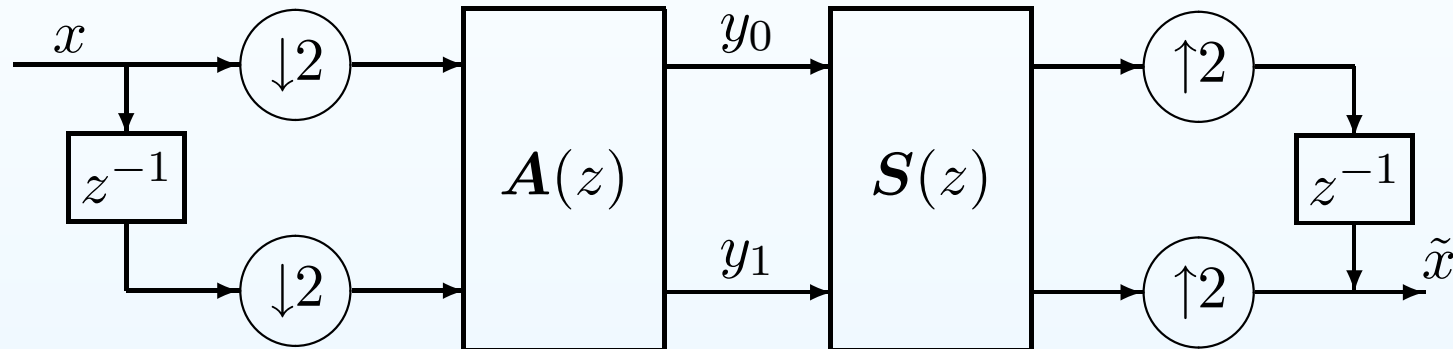
$$F_0(z) = F_{10}(z^2) + z^{-1}F_{00}(z^2)$$

$$F_1(z) = F_{11}(z^2) + z^{-1}F_{01}(z^2)$$

- Aplicăm apoi schemele precedente pentru transformarea bancului de filtre

BF cu două canale—reprezentare polifază

- Se obține schema



- Matricea polifază de analiză este

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

- Matricea polifază de sinteză

$$\mathbf{S}(z) = \begin{bmatrix} F_{00}(z) & F_{01}(z) \\ F_{10}(z) & F_{11}(z) \end{bmatrix}$$

Reconstrucție perfectă

- Un banc de filtre posedă reconstrucție perfectă (RP) dacă

$$\tilde{x}[n] = x[n - D],$$

unde D este un întreg pozitiv—întârzierea

- O primă condiție este evidentă din reprezentarea polifază

$$\mathbf{S}(z)\mathbf{A}(z) = z^{-\tau}\mathbf{I}_2$$

- Întârzierea este $D = 2\tau + 1$ (deci impară !)
- Cea mai simplă soluție $\mathbf{A}(z) = \mathbf{S}(z) = \mathbf{I}$, adică (verificați !)

$$H_0(z) = 1, H_1(z) = z^{-1}, F_0(z) = z^{-1}, F_1(z) = 1$$

- Rezultă $D = 1$
- Aceste filtre sunt inutile, doar arată că RP este posibilă

Exemplu

- Luăm $\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}(1 + z^{-2}) & \frac{1}{4}(1 + z^{-1}) \\ -\frac{1}{4}(1 + z^{-1}) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ și

$$\mathbf{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1 + z^{-1}) \\ \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) & \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}(1 + z^{-2}) \end{bmatrix}$$

- Rezultă $\mathbf{S}(z)\mathbf{A}(z) = z^{-1}\mathbf{I}$, deci se obține RP cu $D = 3$
- Filtrele corespunzătoare sunt

$$H_0(z) = \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}(1 + z^{-4}) + \frac{1}{4}z^{-1}(1 + z^{-2}) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$H_1(z) = -\frac{1}{4}(1 + z^{-2}) + \frac{1}{2}z^{-1} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$F_0(z) = z^{-1} + \frac{1}{2}(1 + z^{-2}) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$F_1(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}(1 + z^{-2}) + \frac{3}{2}z^{-2} - \frac{1}{4}(1 + z^{-4}) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$$

- Acestea sunt filtrele 5/3 (LeGall) din JPEG2000

Altă abordare a RP

- Condiția pe matricea polifază este compactă, dar mai greu de manevrat și mai puțin intuitivă
- Căutăm condiții direct pe filtre
- Aplicând (1) obținem (în schema BF de bază)

$$Y_0(z) = \frac{1}{2} \left[H_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2}) \right]$$

- După interpolare și filtrare pe primul canal, rezultă

$$\tilde{X}_0(z) = \frac{1}{2} F_0(z) [H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)]$$

- Similar, pe al doilea canal

$$\tilde{X}_1(z) = \frac{1}{2} F_1(z) [H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)]$$

Funcții de transfer în BF

- Relație intrare-ieșire poate fi scrisă

$$\tilde{X}(z) = T_d(z)X(z) + T_a(z)X(-z)$$

- Funcția de transfer de distorsie (se aplică direct intrării)

$$T_d(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]$$

- Funcția de transfer de aliere (se aplică intrării modulate)

$$T_a(z) = \frac{1}{2} [H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]$$

- Valorile ideale sunt $T_d(z) = z^{-D}$, $T_a(z) = 0$
- Problemă: ce semnal are transformata Z egală cu $X(-z)$?
Cum arată spectrul lui ?

Eliminarea structurală a alierii

- Erorile de RP datorate alierii pot fi eliminate prin alegerea

$$\begin{aligned}F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z)\end{aligned}\tag{3}$$

- Rezultă $T_a(z) = 0$
- Reamintire: dacă $G(z)$ e filtru trece-jos, atunci $G(-z)$ este trece-sus
- Observăm deci că relațiile de mai sus nu contrazic cerința ca $H_0(z)$ și $F_0(z)$ să fie trece-jos iar $H_1(z)$ și $F_1(z)$ trece-sus
- Mai departe presupunem condiția (3) satisfăcută
- Deci RP se rezumă la condiția $T_d(z) = z^{-D}$, unde

$$T_d(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)]\tag{4}$$

Reconstrucție aproape perfectă

- Uneori se poate renunța la cerința îndeplinirii exacte a condiției de RP, pentru a simplifica proiectarea sau a obține filtre cu performanțe mai bune
- De asemenea, depinzând de natura prelucrării semnalelor din sub-benzi, e posibil ca RP să fie inutilă
- În aceste situații se lucrează cu reconstrucție aproximativă (notată RAP, reconstrucție aproape perfectă; în engleză, nearly perfect reconstruction)
- RAP se poate obține euristic sau impunând condiții precise de tipul

$$\|T_d(z) - z^{-D}\| \leq \varepsilon$$

- De exemplu, folosind norma infinit

$$|T_d(\omega) - e^{-jD\omega}| \leq \varepsilon, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

BF ortogonale

- Vom discuta doar despre filtre FIR. Notăm N_0 și N_1 gradele lui $H_0(z)$ and $H_1(z)$
- BF ortogonale au $N_0 = N_1 = N$ impar și se bazează pe alegerea

$$H_1(z) = -z^{-N} H_0(-z^{-1}) \quad (5)$$

- Dacă $H_0(z) = \sum_{k=0}^N h_k z^{-k}$, atunci

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^N (-1)^k h_{N-k} z^{-k}$$

- In plus, din relația (3), rezultă că

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H_1(-z) = -(-z)^{-N} H_0(z^{-1}) = z^{-N} H_0(z^{-1}) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) = z^{-N} H_1(z^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

- Deci filtrele de sinteză sunt inversele celor de analiză

BFO—răspunsuri în frecvență

- Din (5) rezultă

$$|H_1(\omega)| = |H_0(\pi - \omega)|$$

- Deci răspunsul în frecvență al filtrului trece-sus este cel al filtrului trece-jos oglindit față de $\omega = \pi/2$
- Din (6), condiția de RP $T_d(z) = z^{-N}$ se poate scrie

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_1(z)H_1(z^{-1}) = 2$$

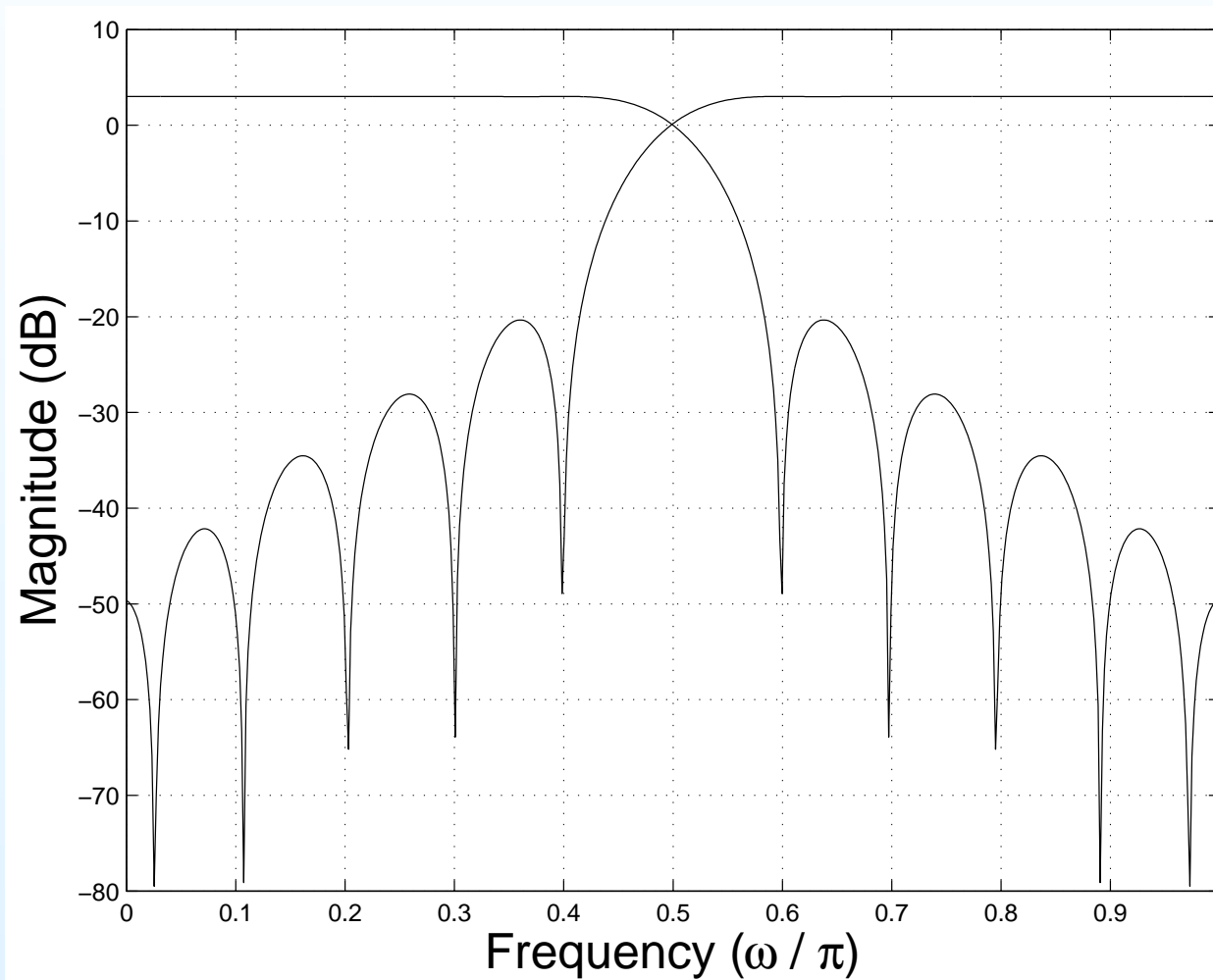
- Rezultă

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = 2, \quad \forall \omega$$

- Deci răspunsurile celor două filtre sunt "complementare"

BFO—exemplu de răspunsuri în frecvență

- Un exemplu de BFO cu $N = 19$



BFO—condiția de RP

- Folosind (5) and (6), funcția de transfer de distorsie este

$$T_d(z) = z^{-N} [H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})]$$

- Notăm (filtrul produs, simetric)

$$P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1}) = \sum_{k=-N}^N p_k z^{-k}$$

- Pentru că $P(z) + P(-z)$ are toți coeficienții puterilor impare egali cu zero, condiția de RP este

$$p_{2\ell} = \delta_\ell, \quad \forall \ell = 0 : (N - 1)/2 \quad (7)$$

- Rezultă $T_d(z) = z^{-N}$, deci RP cu $D = N$
- Coeficienții p_k depind pătratic de cei ai lui $H_0(z)$, deci impunerea condiției (7) nu e simplă

Condiție pe componentele polifază

- Scriem $H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$
- Filtrul produs capată forma

$$P(z) = H_{00}(z^2)H_{00}(z^{-2}) + H_{01}(z^2)H_{01}(z^{-2}) \\ + z^{-1}H_{01}(z^2)H_{00}(z^{-2}) + zH_{00}(z^2)H_{01}(z^{-2})$$

- Primii doi termeni conțin puterile impare, deci condiția de RP este

$$P_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} H_{00}(z)H_{00}(z^{-1}) + H_{01}(z)H_{01}(z^{-1}) = 1 \quad (8)$$

BFO—matricea polifază de analiză

- Punând $H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1}H_{11}(z^2)$, din (5) rezultă că (notăm $\tilde{N} = (N - 1)/2$)

$$H_{10}(z) = z^{-\tilde{N}}H_{01}(z^{-1}), \quad H_{11}(z) = -z^{-\tilde{N}}H_{00}(z^{-1})$$

- Matricea polifază de analiză are deci forma

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ z^{-\tilde{N}}H_{01}(z^{-1}) & -z^{-\tilde{N}}H_{00}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

- Ținând seama de (8) rezultă că

$$\mathbf{A}^T(z^{-1})\mathbf{A}(z) = \mathbf{I}$$

- Matricea $\mathbf{A}(z)$ este paraunitară (definiție)

Ce înseamnă ortogonalitate ?

- Punând $z = e^{j\omega}$, rezultă că

$$\mathbf{A}^T(e^{-j\omega})\mathbf{A}(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$$

- Deci matricea $\mathbf{A}(e^{j\omega})$ este unitară pentru orice frecvență ω
- Sistemul (cu 2 intrări, 2 ieșiri) $\mathbf{A}(z)$ este lossless
- Rezultă că energia (puterea) semnalului de intrare se conservă la ieșire
- Într-un BFO, energia (totală) în sub-benzi este identică cu cea de la intrare

BFO—matricea polifază de sinteză

- Se poate demonstra (exercițiu !) că matricea polifază de sinteză are forma

$$\mathbf{S}(z) = z^{-\tilde{N}} \mathbf{A}^T(z^{-1})$$

- Rezultă că

$$\mathbf{S}(z)\mathbf{A}(z) = z^{-\tilde{N}} \mathbf{I}$$

- Se confirmă RP, cu întârzierea $D = 2\tilde{N} + 1 = N$

BFO—reprezentarea latică

- Se poate demonstra că orice matrice FIR lossless se poate descompune astfel

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{G}_{\tilde{N}+1} \mathbf{\Delta}(z) \mathbf{G}_{\tilde{N}} \dots \mathbf{G}_2 \mathbf{\Delta}(z) \mathbf{G}_1$$

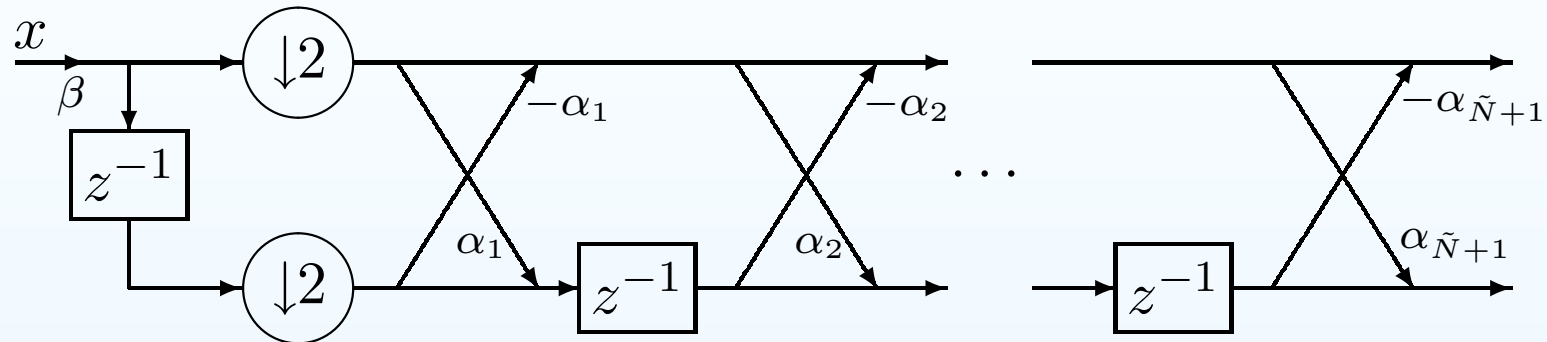
cu

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Delta}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

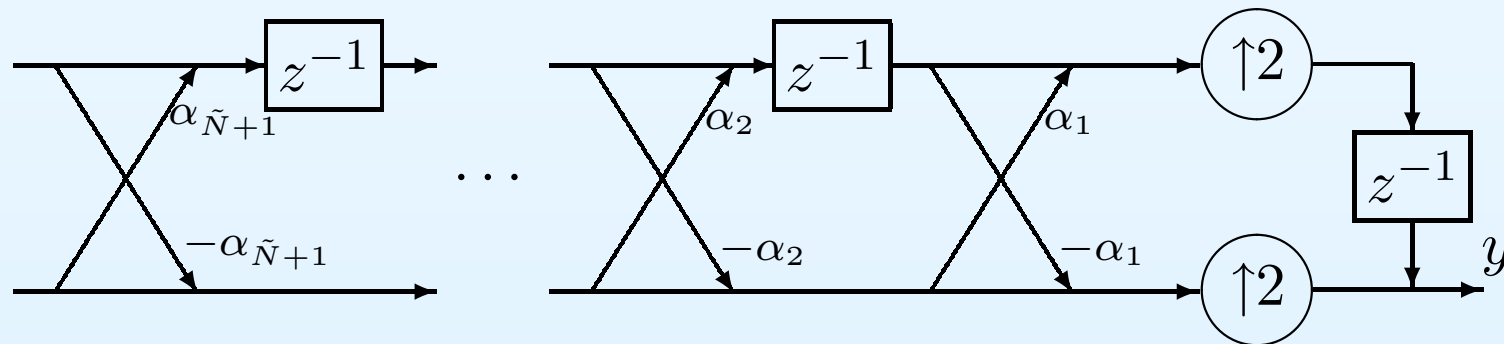
- Matricele \mathbf{G}_k sunt rotații Givens ($c_k^2 + s_k^2 = 1$), deci matrice ortogonale
- Matricea $\mathbf{\Delta}(z)$ e lossless

BFO—implementare de tip latice

- Bancul de analiză



- Matricele G_k se împart la c_k
- Rezultă un factor de corecție β
- Bancul de sinteză



Bancuri de filtre QMF

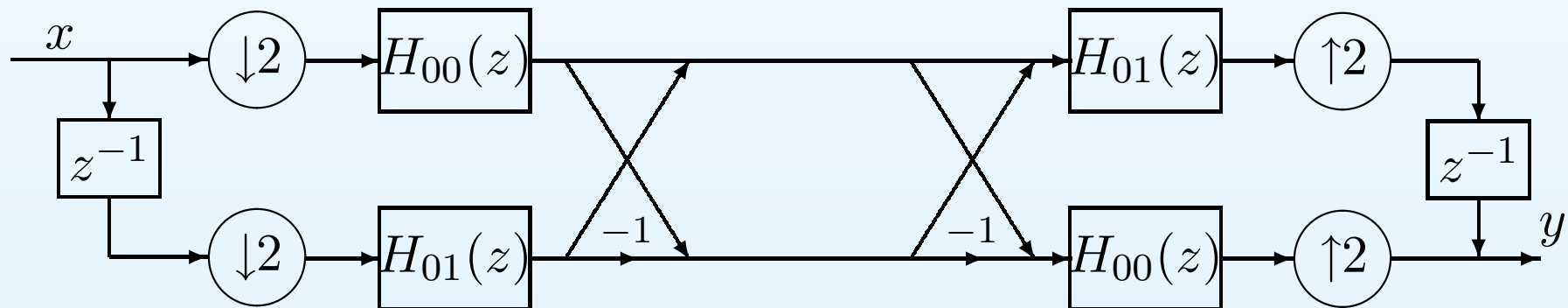
- Bancurile de filtre QMF (quadrature mirror filter) sunt caracterizate de alegerea $H_1(z) = H_0(-z)$
- Istoric, au fost primele propuse, datorită implementării simple
- Răspunsurile în frecvență au proprietăți similare BFO
- Spre deosebire de BFO, nu se poate obține RP în general
- Singurul BF QMF cu RP este cel cu $H_0(z) = (1 + z^{-1})/2$
- Reprezentare polifază: $H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1}H_{01}(z^2)$
- Rezultă $H_1(z) = H_{00}(z^2) - z^{-1}H_{01}(z^2)$

Implementare eficientă

- Matricea polifază de analiză este

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{00}(z) & -H_{01}(z) \end{bmatrix}$$

- Deci implementarea BF QMF se poate face prin schema (verificați partea de sinteză !)



BF biortogonale

- Bancurile de filtre în care matricele polifază nu sunt ortogonale se numesc biortogonale
- Presupunând RP, relația $S(z)A(z) = z^{-\tau}I$ spune că matricele $S(z)$ și $A(z)$ sunt ortogonale una pe cealaltă
- În cazul RAP, clasificarea ortogonal-biortogonal se aplică prin extensie, deși formal incorect
- (Deci QMF ar intra la biortogonale ...)
- Filtrele 5/3 sunt un exemplu simplu de BF biortogonal

Alte proprietăți dorite ale BF

- Fază liniară (filtrele au coeficienți simetrici)
 - poate fi obținută pentru BF biortogonale (dar nu e obligatorie)
 - imposibilă pentru BF ortogonale
- $H_0(z)$ nu schimbă semnalul constant și taie complet semnalul de frecvență maximă $(-1)^n$, adică $H_0(1) = 1$, $H_0(-1) = 0$
- $H_1(z)$ are proprietăți inverse: $H_1(1) = 0$, $H_1(-1) = 1$
- Condiții similare pentru $F_0(z)$, $F_1(z)$ (cu 2 în loc de 1)
- Aceste condiții pot fi impuse pentru toate tipurile de BF
- Justificarea lor: construcția de wavelets

Proprietăți generale—recapitulare

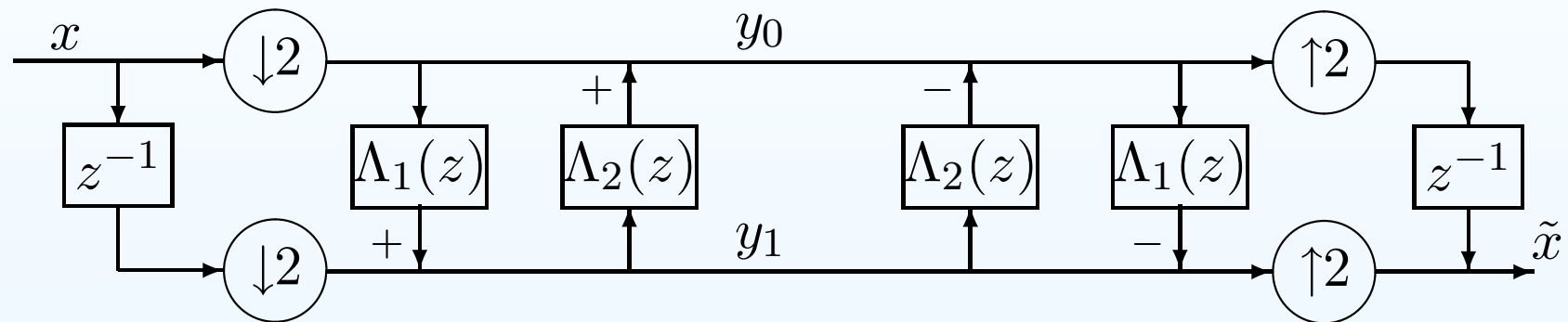
- Bancurile de filtre cu două canale au următoarele proprietăți referitoare la fază, întârziere și reconstrucție perfectă

Tip	Relații	Fază	D	RP
Ort.	$H_1(z) = -z^{-N} H_0(-z^{-1})$	NL	N	RP, RAP
QMF	$H_1(z) = H_0(-z)$	L, NL	$\leq N$	RAP
Biort.	$H_0(z), H_1(z)$	L, NL	$\leq \frac{N_0 + N_1}{2}$	RP, RAP

- De obicei se dorește întârziere mică a BF
- Cu RAP, se poate obține și întârziere fracționară

Lifting

- Schemă de lifting în doi pași



- Acest BF posedă RP prin construcție !
- Orice număr de pași este acceptabil
- Filtrele $\Lambda_i(z)$ sunt de obicei FIR și scurte
- Orice BF FIR poate fi reprezentat prin lifting
- De obicei, această reprezentare este cea mai eficientă pentru implementare

Relația cu matricea polifază

- Matricea polifază de analiză este

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & \Lambda_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Lambda_2\Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matricea polifază de analiză a filtrelor 5/3 (scalată și deplasată în timp, ceea ce se poate ușor realiza cu blocuri de întârziere suplimentare) se obține cu

$$\Lambda_1(z) = -\frac{1}{2}(1 + z^{-1}), \quad \Lambda_2(z) = \frac{1}{4}(1 + z)$$

Transformări reversibile prin lifting

- Schema de lifting rămâne RP chiar dacă blocurile componente sunt neliniare !
- Un BF este reversibil (integer-to-integer)
 - dacă semnalul de intrare $x[n]$ are valori întregi, atunci semnalele din sub-benzi, $y_0[n]$ și $y_1[n]$ au valori întregi
 - dacă posedă RP
- Utilitate: codare fără pierderi

Lifting cu rotunjire

- Dacă $\Lambda_1(z)$ este FIR, primul pas de lifting este

$$y_1^{\{1\}}[n] = y_1^{\{0\}}[n] + \sum_i \lambda_1[i] y_0^{\{0\}}[n - i]$$

- Pentru a obține valori întregi atunci când intrarea are valori întregi, se rotunjește rezultatul la cel mai apropiat întreg
- Deci, se înlocuiește expresia de mai sus prin

$$y_1^{\{1\}}[n] = y_1^{\{0\}}[n] + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sum_i \lambda_1[i] y_0^{\{0\}}[n - i] \right\rfloor$$

- Facând aceeași modificare pentru toți pașii, se obține o transformare reversibilă
- În "frecvență" (transformarea fiind neliniară, nu se poate vorbi despre frecvență în sens propriu), transformarea nu este departe de proprietățile BF original

DWT—transformarea wavelet discretă

- Formal, DWT este obținută prin prelucrarea (recursivă a) semnalului din sub-banda joasă cu același BF
- Deci, semnalul y_0 este prelucrat de BF de analiză, obținându-se semnalele y_{00} și y_{01}
- Mai departe, y_{00} este prelucrat de BF de analiză, obținându-se semnalele y_{000} și y_{001} , etc.
- Practic se folosesc doar câteva nivele (trei, mai sus)
- Reconstrucția se face cu BF de sinteză, în ordine inversă (și cu grijă la sincronizare, datorită întârzierilor posibil diferite)
- În cazul unor filtre ideale, benzile de frecvență sunt: $[0, \pi/8]$ pentru y_{000} , $[\pi/8, \pi/4]$ pentru y_{001} , $[\pi/4, \pi/2]$ pentru y_{01} , $[\pi/2, \pi]$ pentru y_1
- Mai multe despre wavelets—în semestrul viitor

Proiectarea bancurilor de filtre

- Tipuri de metode
 - Rapide și simple, care nu garantează un rezultat optim din nici un punct de vedere
 - Bazate pe optimizare
- În general, doar optimizarea BF ortogonale poate fi formulată ca o problemă convexă (obținându-se deci BF optim pentru probleme de dimensiuni moderate—gradul filtrelor de ordinul sutelor)
- Pentru filtrele QMF și biortogonale se utilizează metode de optimizare locală (inițializate "inteligent")
- BF ortogonale și QMF sunt caracterizate de un singur filtru, iar cele biortogonale de două; optimizarea acestor filtre produce rezultate optime și pentru celelalte
- Discutăm doar cazul filtrelor FIR

Criteria de optimizare (1)

- Optimizarea unui filtru trece-jos $H(z)$ se poate face prin minimizarea energiei în banda de oprire

$$E_2 = \int_{\omega_s}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega$$

- Banda de oprire este $[\omega_s, \pi]$, cu ω_s puțin mai mare decât $\pi/2$
- Notăm $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_N]^T$ vectorul coeficienților filtrului
- Energia în banda de oprire poate fi scrisă în forma pătratică

$$E_2 = \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h}$$

- Matricea \mathbf{C} este Toeplitz, simetrică și pozitiv definită, deci E_2 este funcție convexă de \mathbf{h}
- Elementul de pe diagonala k este $\int_{\omega_s}^{\pi} \cos(k\omega) d\omega$

Criterii de optimizare (2)

- Pentru fitrele trece-sus, banda de oprire este $[0, \omega_s]$, cu ω_s puțin mai mic decât $\pi/2$
- Un criteriu alternativ este cel minimax, în care se minimizează valoarea maximă a răspunsului în frecvență în banda de oprire
- Criteriul de minimizat este (convex !)

$$E_m = \max_{\omega \in [\omega_s, \pi]} |H(\omega)|$$

- Minimizarea energiei este în general mai simplă și (uneori) se poate face exact
- Minimizarea erorii maxime este mai dificilă; se poate face
 - exact, utilizând programarea semidefinită
 - aproximativ, prin discretizare

Restricții

- În afara RP (sau RAP), celelalte restricții ale problemei de optimizare au fost menționate anterior
- Faza liniară reduce complexitatea problemei (dar nu și pe cea a găsirii soluției), prin reducerea numărului de variabile (coeficienții filtrului sunt simetrici)
- Impunerea unei rădăcini în e.g. $z = -1$ se face punând

$$H(z) = (1 + z^{-1})\hat{H}(z)$$

- Coeficienții lui $\hat{H}(z)$ devin variabilele problemei de optimizare
- Impunerea unei valori e.g. $H(0) = 1$ produce o restricție liniară
- Deci doar RP produce dificultăți

Proiectarea BF ortogonale

- BFO depinde de un singur filtru, $H_0(z)$ (FIR, de ordin N impar)
- Notând $P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$, condiția de RP este $p_{2\ell} = \delta_\ell$, $\forall \ell = 0 : (N - 1/2)$
- Se observă că $P(\omega) = |H(\omega)|^2 \geq 0$, $\forall \omega$
- Notăm $\mathbf{p} = [p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N]^T$ ($P(z)$ e simetric)
- Energia în banda de oprire este

$$E_2 = \int_{\omega_s}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_{\omega_s}^{\pi} P(\omega) d\omega = \mathbf{c}^T \mathbf{p}$$

unde $c_0 = \pi - \omega_s$ și

$$c_k = 2 \int_{\omega_s}^{\pi} \cos(k\omega) d\omega = -\frac{2 \sin(k\omega_s)}{k}$$

Problema de optimizare BFO

- Se obține următoarea problemă de optimizare

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & p_{2\ell} = \delta_\ell, \ell = 0 : (N - 1/2) \\ & P(\omega) \geq 0, \forall \omega \end{aligned} \tag{9}$$

- După rezolvarea (9), $H_0(z)$ se obține prin factorizare spectrală (discutată mai târziu)
- Dificultatea devine acum condiția de pozitivitate (altfel criteriul și prima restricție sunt liniare)
- Totuși, problema de optimizare este convexă (mulțimea polinoamelor trigonometrice pozitive este convexă)
- Vom prezenta două variante de rezolvare
 - aproximativă (propusă inițial)
 - exactă, utilizând SDP

Optimizare aproximativă a BFO

- Ideea originală (potrivită utilizării unui criteriu minimax): se proiectează $\tilde{P}(\omega)$ în sens minimax, impunând condiția $\tilde{p}_{2\ell} = \delta_\ell$
- Se obține $|\tilde{P}(\omega)| \leq \varepsilon, \forall \omega \in [\omega_s, \pi]$
- Atunci $P(z) = \tilde{P}(z) + \varepsilon \geq 0, \forall \omega$ (ilustrarea răspunsului în frecvență, la tablă)
- Evident, ε poate fi determinat doar aproximativ, deci în practică se alege o valoare mai mare decât cea necesară pentru a obține pozitivitatea

Variantă cu discretizare

- Versiune evoluată: se rezolvă (9) prin discretizare
- Se impune condiția de pozitivitate pe o grilă de $I + 1$ frecvențe $\omega_i = i\pi/K$
- Se obține o problemă de programare liniară
- Totuși soluția $\hat{P}(\omega)$ obținută poate fi negativă (și de obicei este) între punctele de discretizare
- Deci din nou trebuie adăugată o constantă pozitivă mică la $\hat{P}(z)$ (de obicei ajustând valoarea adunată până când este posibilă factorizarea spectrală)
- În concluzie, nu se poate garanta optimalitatea soluției

Spre rezolvarea exactă

- Notăm $\boldsymbol{\psi}(z) = [1 \ z \ z^2 \ \dots \ z^N]^T$
- Dacă $P(z) = H(z)H(z^{-1})$, atunci putem scrie

$$P(z) = \boldsymbol{\psi}(z^{-1})^T \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^T \boldsymbol{\psi}(z) = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\Psi}(z) \mathbf{h} \quad (10)$$

unde

$$\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{\psi}(z^{-1})\boldsymbol{\psi}(z)^T = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \\ z^{-1} & 1 & z & \ddots & z^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & z \\ z^{-N} & \dots & \dots & z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Parametrizarea polinoamelor trigonometrice pozitive

- Teoremă: un polinom $P(z)$ este pozitiv (adică $P(\omega) \geq 0, \forall \omega$) dacă și numai dacă există o matrice pozitiv definită Q de dimensiune $(N + 1) \times (N + 1)$ astfel încât

$$p_k = \text{tr}[\Theta_k Q] \quad (12)$$

- Matricea Θ_k este Toeplitz elementară, cu 1 pe diagonala k și zero în rest
- De exemplu, pentru $N = 2$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- De ce e (12) bună ? Pentru că relația dintre coeficienții lui $P(z)$ și elementele lui Q este liniară

Observație preliminară

- Observăm întâi că (12) este echivalentă cu

$$P(z) = \boldsymbol{\psi}(z^{-1})^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}(z) \quad (13)$$

- Într-adevăr

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=-N}^N p_k z^k \stackrel{(12)}{=} \sum_{k=-N}^N \text{tr}[\boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{Q}] z^k \\ &= \text{tr} \left[\left(\sum_{k=-N}^N \boldsymbol{\Theta}_k z^k \right) \mathbf{Q} \right] \\ &= \text{tr} [\boldsymbol{\Psi}(z) \mathbf{Q}] = \text{tr} [\boldsymbol{\psi}(z^{-1}) \boldsymbol{\psi}(z)^T \mathbf{Q}] \\ &= \boldsymbol{\psi}(z)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}(z^{-1}) = \boldsymbol{\psi}(z^{-1})^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}(z) \end{aligned}$$

Demonstrație

- " \Rightarrow ": dacă $P(z)$ este pozitiv, atunci admite factorizare spectrală, deci relația (10) e adevărată
- Din (10) rezultă că relația (13), deci și (12), este adevărată pentru $Q = hh^T$
- " \Leftarrow ": dacă (12) are loc pentru $Q \succeq 0$, atunci din (13) rezultă că

$$P(\omega) = \psi(e^{-j\omega})^T Q \psi(e^{j\omega}) = \psi(e^{j\omega})^H Q \psi(e^{j\omega}) \geq 0, \quad \forall \omega$$

- Deci polinomul este pozitiv, Q.E.D.
- Completare: în cazul în care polinomul $P(z)$ are coeficienți complecși, dar ia valori reale pe cercul unitate (deci $p_{-k} = p_k^*$), teorema este valabilă cu Q hermitică

Optimizarea BFO—problema SDP

- Folosind parametrizarea (12), problema (9) capătă forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & p_{2\ell} = \delta_\ell, \ell = 0 : (N - 1/2) \\ & p_k = \text{tr}[\Theta_k \mathbf{Q}], \quad \mathbf{Q} \succeq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

- Aceasta este o problemă SDP
- După rezolvarea ei, filtrul $H_0(z)$ se calculează prin factorizare spectrală
- Problema (14) se poate rezolva în timp rezonabil pentru N de ordinul sutelor

Factorizare spectrală

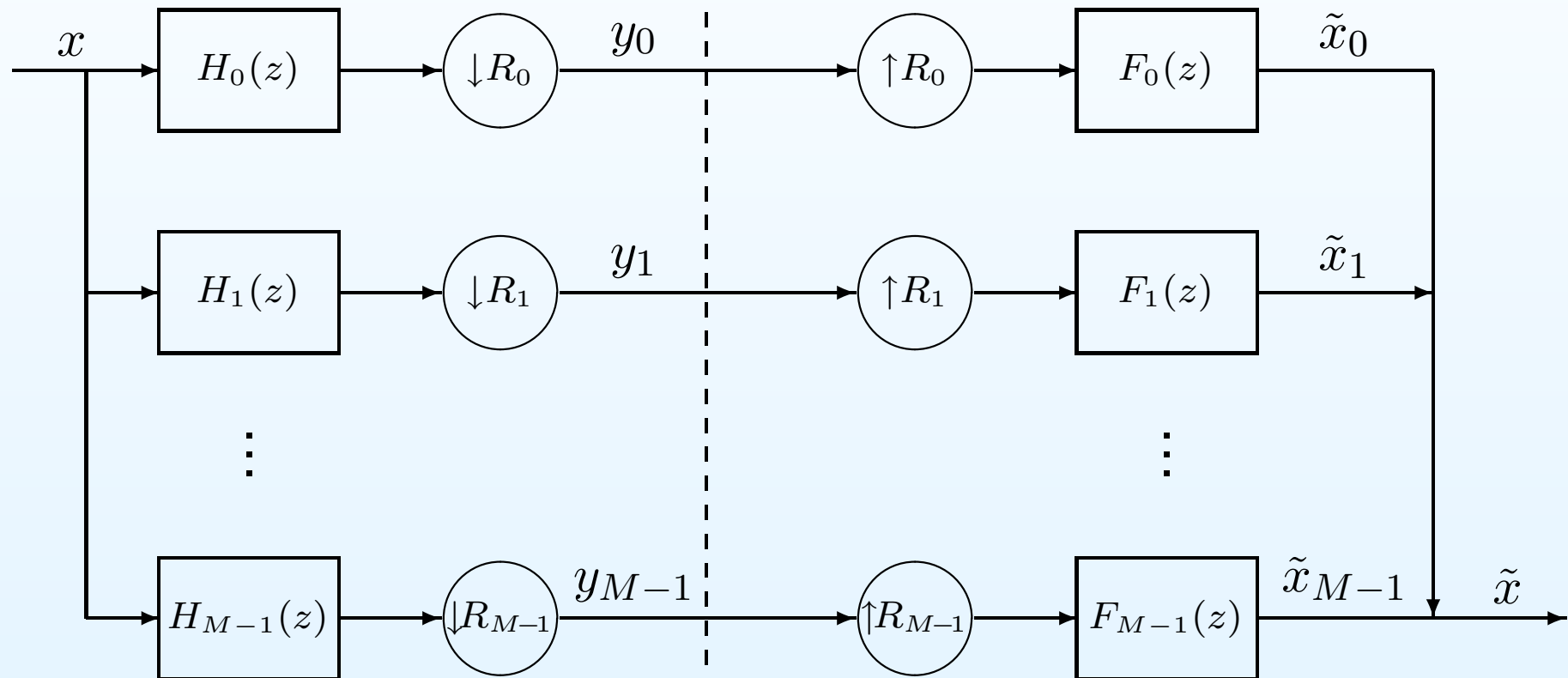
- Teoremă (existența factorizării spectrale): dacă $P(z) = \sum_{k=-N}^N p_k z^k$, cu $p_{-k} = p_k$, este pozitiv pe cercul unitate ($P(\omega) \geq 0, \forall \omega$), atunci există $H(z) = \sum_{k=0}^N h_k z^{-k}$ astfel încât $P(z) = H(z)H(z^{-1})$
- Demonstrație: se bazează în esență pe faptul că dacă rădăcinile lui $P(z)$ (care sunt simetrice față de cercul unitate, datorită simetriei coeficienților) sunt pe cerc, atunci ele sunt duble
- Atunci $H(z)$ se poate alege de fază minimă, având toate rădăcinile lui $P(z)$ din cercul unitate și jumătate din cele de pe cerc
- În general, $H(z)$ poate fi ales în mai multe feluri (regula de alocare: dacă $H(z)$ are o rădăcină, atunci $H(z^{-1})$ are simetrica ei)

Algoritmi de factorizare spectrală

- Cel mai simplu: se calculează rădăcinile lui $P(z)$, dintre care se aleg jumătate ca mai sus
- Dezavantaj: destul de dificil de a decide numeric multiplicitatea rădăcinilor de pe cerc (mai ales că de multe ori nu se știe a priori dacă $P(z)$ e pozitiv)
- Factorizarea spectrală nu este o problemă bine condiționată numeric, deci orice algoritm poate întâmpina probleme
- Alți algoritmi
 - Newton-Raphson: simplu și neașteptat de precis
 - Utilizând SDP (relativ imprecisă și lentă)
 - Cu ecuația Riccati (precisă, dar lentă pentru N mare)
 - Metoda Bauer (factorizare Cholesky a unor matrice Toeplitz din ce în ce mai mari)

Bancuri de filtre cu mai multe canale

- Schema generală



Definiții și notații

- M —numărul de canale
- BF este *eșantionat critic* dacă
$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{R_i} = 1$$
- În acest caz, numărul de eșantioane din sub-benzi este egal cu numărul de eșantioane de intrare
- BF este *supraeșantionat* dacă mai sus e semnul " \geq ".
Atunci, numărul de eșantioane din sub-benzi este mai mare decât la intrare
- (Semnul " \leq " nu apare practic, RP nefiind posibilă)
- BF este *uniform* dacă $R_i = R, \forall i = 0 : M - 1$
- Altfel, BF este *neuniform*

Răspunsuri în frecvență

- Într-un BF uniform banda de trecere a filtrelor $H_i(z)$ și $F_i(z)$ este (tipic) $[i\pi/M, (i+1)\pi/M]$
- Într-un BF neuniform, benzile de trecere pot avea diverse lățimi (vezi exemplul DWT, în care apărea un BF neuniform cu 4 canale)
- Ilustrarea răspunsurilor—la tablă !

Funcții de transfer

- Similar cu cazul $M = 2$, relația de intrare-ieșire este

$$\tilde{X}(z) = \sum_{i=0}^{M-1} F_i(z) \frac{1}{R_i} \sum_{\ell=0}^{R_i-1} H_i(zw_{R_i}^{\ell}) X(zw_{R_i}^{\ell})$$

- Pentru BF uniforme, relația devine

$$\tilde{X}(z) = T_0(z)X(z) + \sum_{\ell=1}^{R-1} T_{\ell}(z)X(zw_R^{\ell}) \quad (15)$$

- Funcția de transfer de distorsie este

$$T_0(z) = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{M-1} H_i(z)F_i(z) \quad (16)$$

- Funcțiile de transfer de aliere sunt

$$T_{\ell}(z) = \sum_{i=0}^{M-1} F_i(z)H_i(zw_R^{\ell}), \quad \ell = 1 : R - 1 \quad (17)$$

Condiții de reconstrucție perfectă

- Condițiile de RP sunt

$$T_0(z) = z^{-D}, \quad T_\ell(z) = 0, \quad \ell = 1 : R - 1$$

- În general ele sunt greu de îndeplinit (simultan cu obținerea de răspunsuri în frecvență bune ale filtrelor), fiind înlocuite de diverse aproximații
- Totuși, libertate mai mare decât în cazul $M = 2$, de exemplu se poate obține ortogonalitate cu filtre cu fază liniară

Reprezentarea polifază

- Ne ocupăm în continuare de BF uniforme critic eșantionate (deci $R = M$)
- Reprezentarea polifază de tip I (pentru BF de analiză)

$$H_i(z) = \sum_{j=0}^{M-1} z^{-j} H_{ij}(z^M)$$

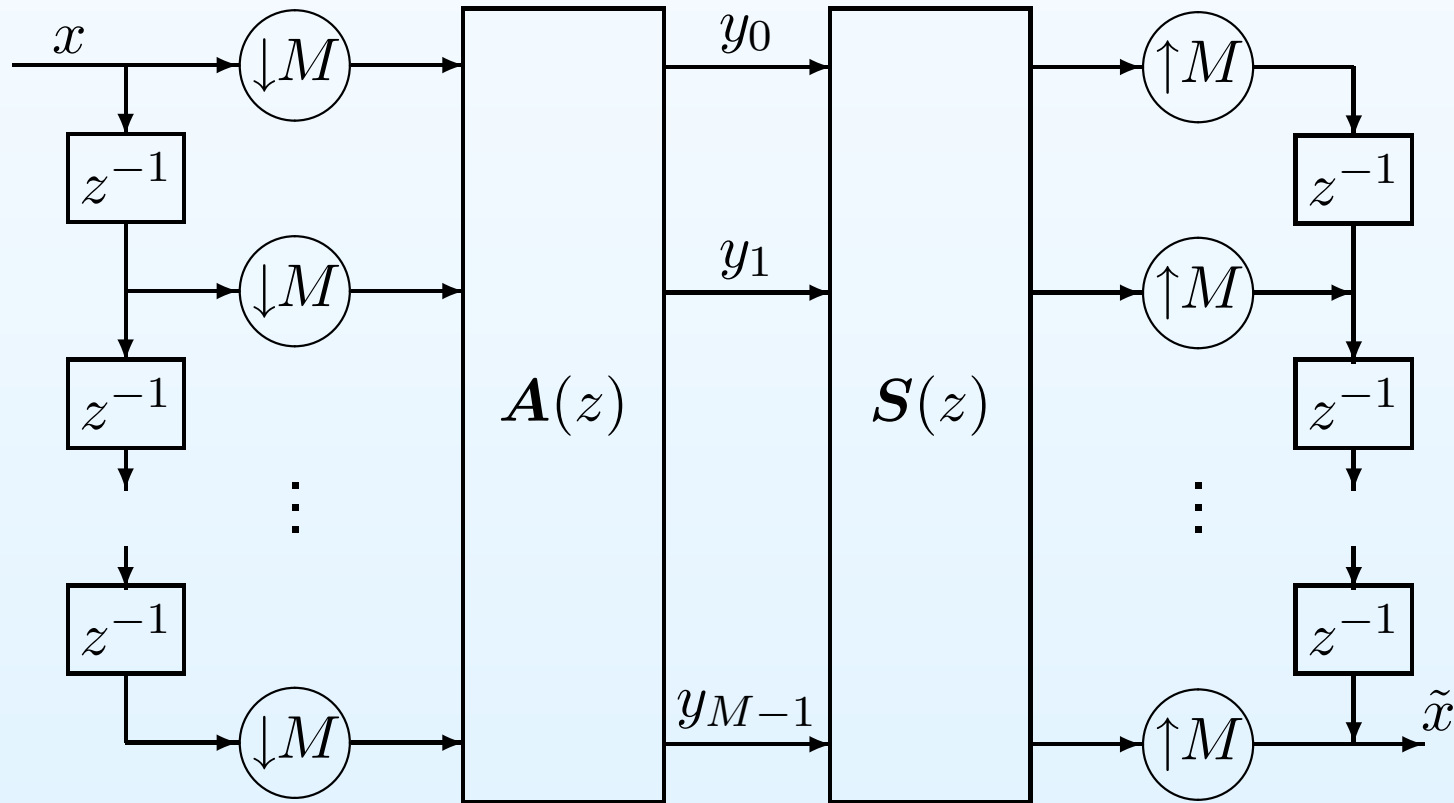
- Matricea polifază de analiză este $\mathbf{A}(z) = [H_{ij}(z)]_{i,j=0:M-1}$
- Reprezentarea polifază de tip II (pentru BF de sinteză)

$$F_i(z) = \sum_{j=0}^{M-1} z^{M-j-1} F_{ji}(z^M)$$

- Matricea polifază de sinteză este $\mathbf{S}(z) = [F_{ij}(z)]_{i,j=0:M-1}$

BF în formă polifază

- Utilizând identitățile nobile, se obține schema de mai jos
- Condiția de RP este $S(z)A(z) = z^{-\tau}$, caz în care rezultă $D = M(\tau + 1) - 1$



Bancuri de filtre modulate

- Deoarece proiectarea și implementarea a $2M$ filtre diferite este complicată, se preferă utilizarea BF modulate, care sunt definite de unul sau două filtre prototip
- Notăm $H(z)$ și $F(z)$ cele două filtre prototip, ambele FIR de ordin N
- Notăm $h[n]$, $f[n]$ coeficienții lor
- Un banc de filtre cos modulat are filtrele definite prin

$$h_i[n] = h[n] \cos \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{M} \left(n - \frac{D}{2} \right) + (-1)^i \frac{\pi}{4} \right]$$
$$f_i[n] = f[n] \cos \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{M} \left(n - \frac{D}{2} \right) - (-1)^i \frac{\pi}{4} \right]$$

- D este întârzierea BF
- Uneori se ia $H(z) = F(z)$, pentru simplificarea proiectării (dar cu rezultate în principiu mai proaste)

Comentarii

- Răspunsurile în frecvență—la tablă
- BF se poate implementa folosind DCT (de altfel forma prototipurilor este special aleasă în acest scop)
- Problema de proiectare: găsirea prototipurilor astfel încât să se obțină RAP
- Întârzierea poate fi aleasă în intervalul $[M, 2N - M]$
- Optimizarea este în general dificilă (problema nu e nici pe departe convexă)

BF modulate prin DFT

- BF DFT modulate sunt definite prin

$$h_i[n] = h[n] \exp(j\pi in/M)$$
$$f_i[n] = f[n] \exp(j\pi in/M)$$

- Interpretarea în frecvență este acum evidentă
- Dacă $H(z)$ are coeficienți reali și banda de trecere egală cu $[-\pi/2M, \pi/2M]$, atunci $H_i(z)$ are banda de trecere deplasată cu $i\pi/M$, adică de lățime π/M , centrată în $i\pi/M$
- Filtrele au coeficienți complecși, în general, deci chiar dacă semnalul de intrare e real, semnalele din sub-benzi sunt complexe
- Totuși, acest BF se poate implementa eficient
- Singura problemă: nu este un BF uniform pe $[0, \pi]$!

BF GDFT modulate

- Generalizarea bancurilor de filtre DFT se face prin alegerea

$$h_i[n] = h[n] \exp [j\pi(i + i_0)(n + n_0)/M]$$

$$f_i[n] = f[n] \exp [j\pi(i + i_0)(n + n_0)/M]$$

- Dacă $H(z)$ are coeficienți reali și banda de trecere egală cu $[-\pi/2M, \pi/2M]$, atunci $H_i(z)$ are banda de trecere de lățime π/M , centrată în $(i + i_0)\pi/M$
- Un BF uniform pe $[0, \pi]$ se obține alegând $i_0 = 1/2$
- Parametrul n_0 influențează doar întârzierea