Prelucrarea semnalelor

Capitolul 1: Semnale

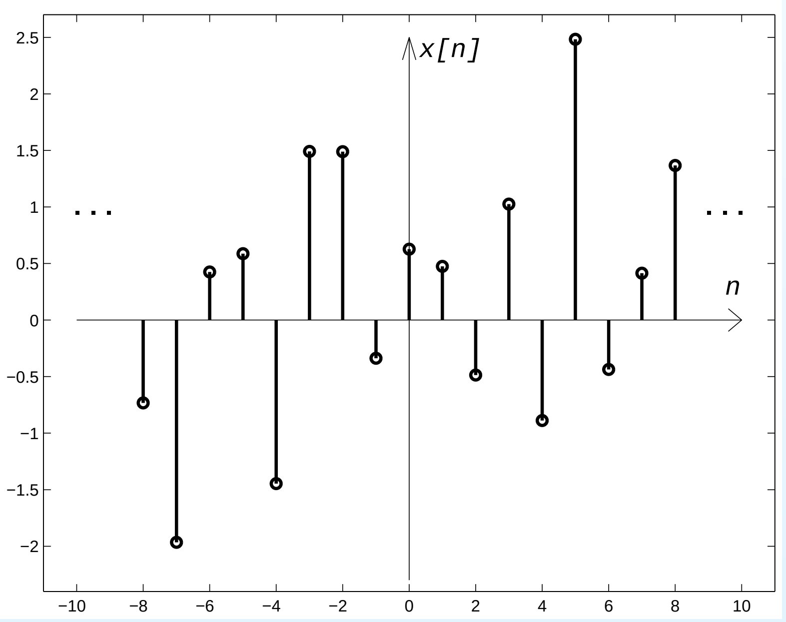
Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Semnale discrete

- Semnal discret: o funcţie $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
- Mulţimea $\mathbb{Z}$: timpul (discret)
- $x[n]$: valoarea semnalului la momentul n (eşantionul n)
- Abuz de notaţie: întreg semnalul este $x[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$ e variabilă liberă)



Proprietăţi curente

- Semnalul $x[n]$ este periodic de perioadă N sau N-*periodic*, dacă $x[n] = x[n + kN]$, pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$. În general, numim perioadă a semnalului cel mai mic N pozitiv cu proprietatea de mai sus.
- Semnalul $x[n]$ este absolut sumabil ($x[n] \in \ell_1$) dacă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

- Semnalul $x[n]$ are energie finită ($x[n] \in \ell_2$) dacă

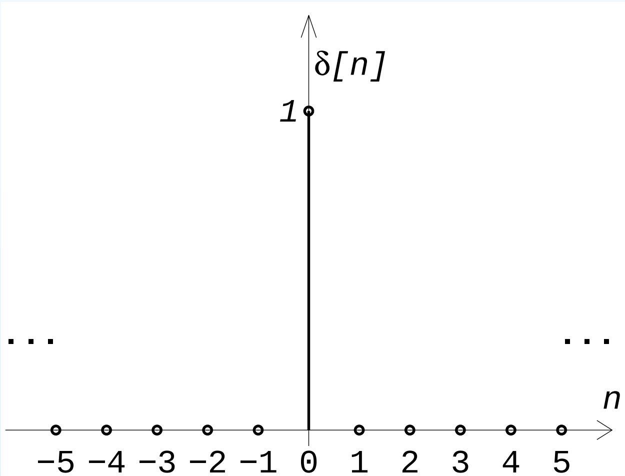
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

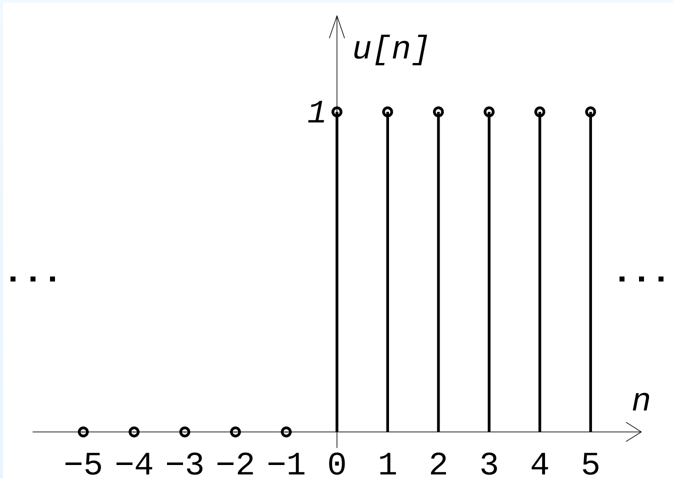
Suportul unui semnal

- Semnalul $x[n]$ are suport $\mathcal{T} \in \mathbb{Z}$ dacă $x[n] = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{T}$, adică semnalul este nul în afara mulţimii suport.
- Suportul este finit, când $\mathcal{T}$ este o mulţime finită, e.g. $\mathcal{T} = 0 : M$, unde M este un întreg pozitiv;
- Suportul este infinit la dreapta, când $x[n] = 0$ pentru $n < M$, cu $M \in \mathbb{Z}$ fixat.
- Suportul este infinit la stânga, când $x[n] = 0$ pentru $n > M$, cu $M \in \mathbb{Z}$ fixat.
- Suportul este dublu infinit (sau infinit bilateral), când $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$.

Semnale uzuale

- Impuls unitate: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$
- Treaptă unitate: $u[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \geq 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$





Semnal ca sumă de impulsuri

- Orice semnal $x[n]$ poate fi descris ca o sumă infinită de impulsuri unitate (decalate în timp), anume

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

- De exemplu, treapta unitate se poate scrie

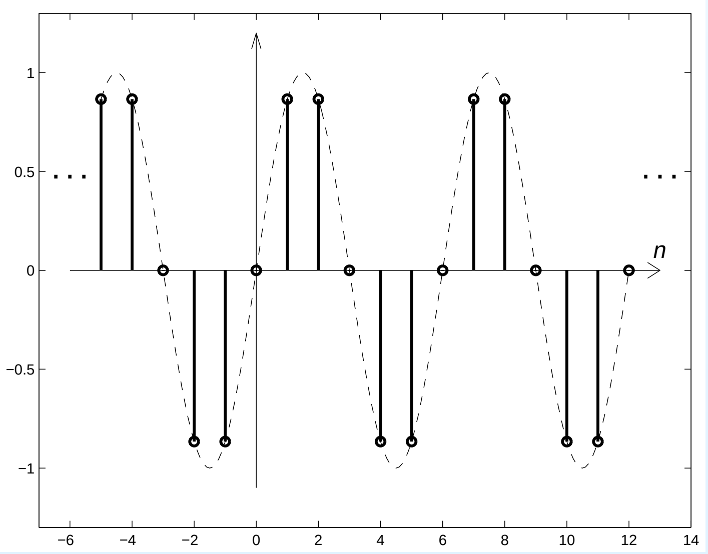
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

Semnale sinusoidale

- Sinusoida reală: $x[n] = \sin(\omega n + \varphi)$
- Sinusoida complexă:
  $x[n] = e^{j(\omega n+\varphi)} = \cos(\omega n + \varphi) + j\sin(\omega n + \varphi)$
- Numim ω *frecvenţa* semnalului (atenţie: în fizică ω este pulsaţia)
- φ este defazajul sau faza iniţială

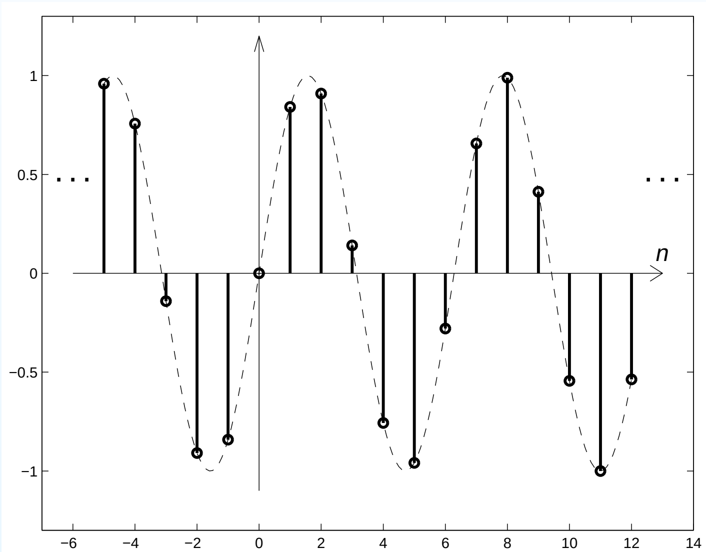
Periodicitatea semnalelor sinusoidale

- Sinusoidele continue sunt periodice:
  $x(t) = \sin(\Omega t + \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, are perioada $T_0 = 2\pi/\Omega$
- Sinusoida discretă $x[n] = \sin(\omega n + \varphi)$ este periodică doar dacă există un întreg k astfel încât $N = \frac{2\pi k}{\omega}$ este întreg (deci π/ω este un număr raţional)
- Exemplu: semnalul $\sin(\pi n/3)$ are perioadă 6
  (Cu linie punctată, sinusoida continuă $\sin(\pi t/3)$)



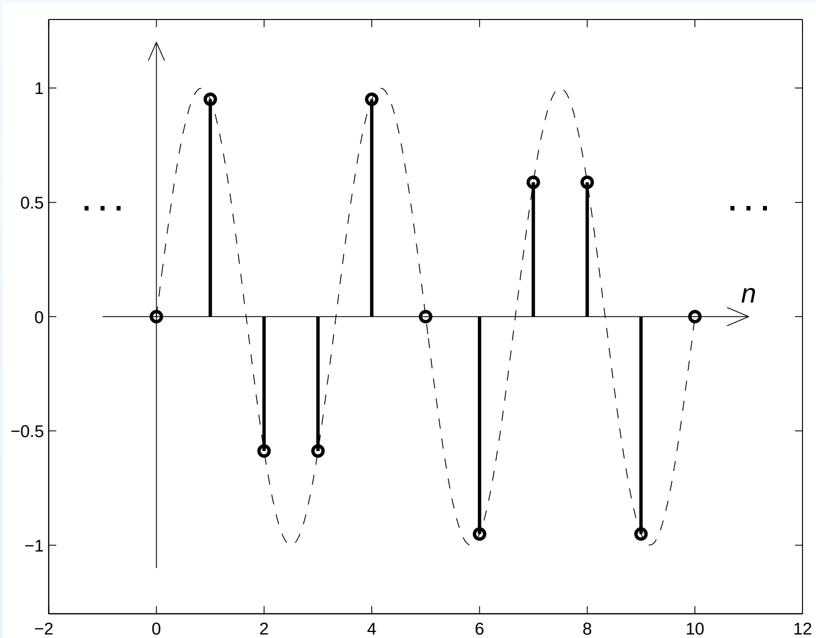
Sinusoide discrete neperiodice

- Majoritatea sinusoidelor sunt neperiodice !
- Exemplu: $\sin n$ este neperiodică



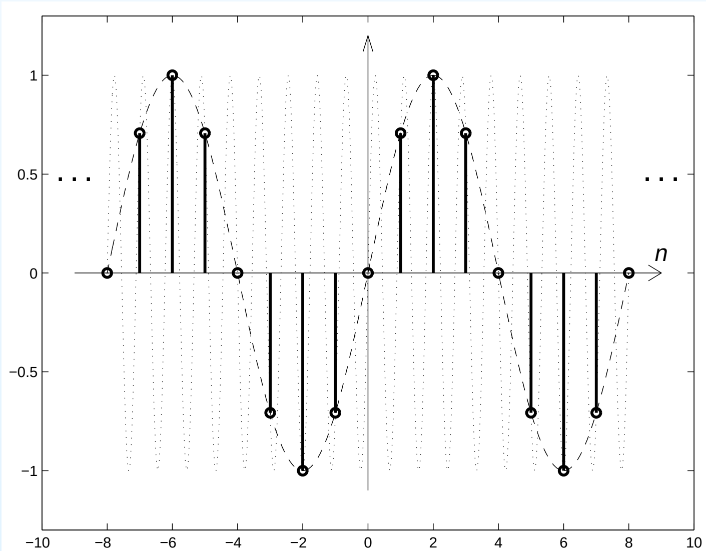
Relaţia cu perioada sinusoidei continue

- Semnalul $\sin(3\pi n/5)$ are perioada $N = 10$
- Cel mai mic k pentru care $N = \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{10k}{3} \in \mathbb{Z}$ este $k = 3$
- k reprezintă numărul de perioade ale sinusoidei continue $x(t) = \sin(3\pi t/5)$ care corespund unei perioade a sinusoidei discrete



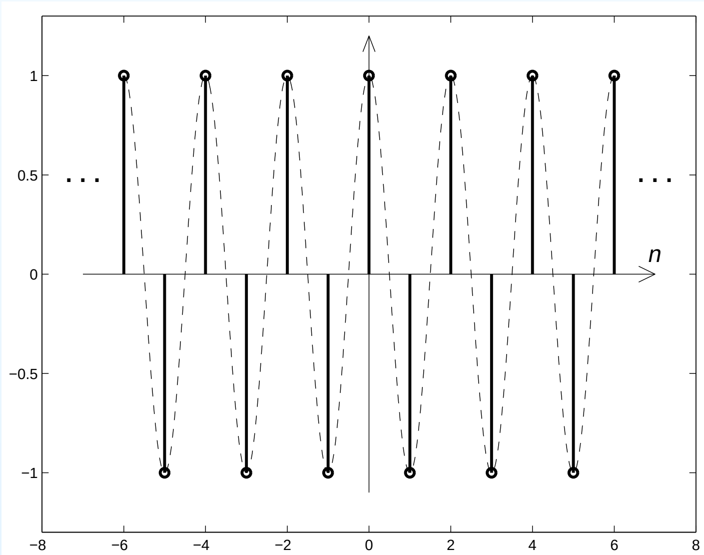
Sinusoide periodice identice

- Sinusoidele cu frecvenţele ω şi $\omega + 2k\pi$, unde k este un întreg arbitrar, sunt identice
- Demonstraţie: $\sin((\omega + 2k\pi)n + \varphi) = \sin(\omega n + \varphi)$
- Concluzie: doar semnalele sinusoidale cu frecvenţe $\omega \in [-\pi, \pi]$ sunt distincte
- Exemplu: $\sin(\pi n/4)$ şi $\sin(9\pi n/4)$ sunt identice



Frecvenţe joase, înalte

- Frecvenţe joase: ω mic
- Cazul extrem: semnalul constant, când $\omega = 0$
- Frecvenţe înalte: $|\omega|$ aproape de π
- Frecvenţa maximă este $\omega = \pi$



Operaţii cu semnale

- Suma: $x[n] + y[n]$
- Produs cu un scalar: $\alpha x[n]$
- Convoluţie: $x[n] * y[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$
- Modulaţie în timp: $x[n]y[n]$
  (se spune că $x[n]$ este modulat în timp prin $y[n]$, sau invers)

Transformata Fourier

- Transf. Fourier a semnalului $x[n]$ este funcţia $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \tag{1}$$

  Notăm pe scurt $X(\omega) = TF(x[n])$.
- Transformata Fourier $X(\omega)$ este periodică cu perioada 2π. Ne interesează doar intervalul $\omega \in [-\pi, \pi]$.
- Nu orice semnal $x[n]$ are o transformată Fourier definită pe întreg intervalul $[-\pi, \pi]$, deoarece seria (1) poate fi divergentă.

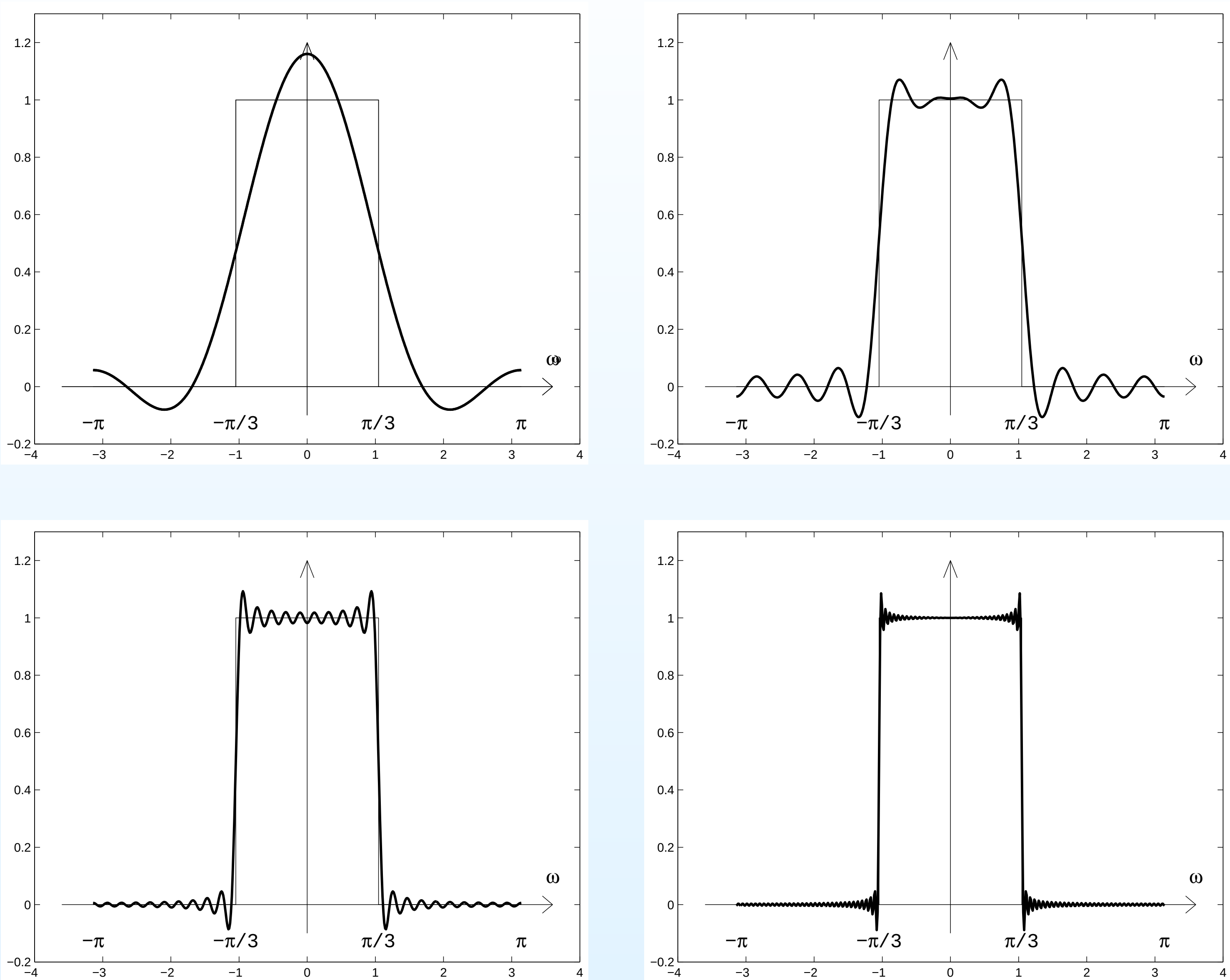
Condiţii de convergenţă

- Dacă semnalul $x[n]$ este absolut sumabil, atunci $X(\omega)$ există pentru orice ω. Mai mult, seria (1) converge uniform către o funcţie continuă în ω.
- Dacă $x[n]$ este un semnal de energie finită, atunci seria (1) converge aproape peste tot.
- Notând $X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}$, avem

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0,$$

- "Energia" erorii de aproximare a lui $X(\omega)$ prin $X_M(\omega)$ tinde spre zero, dar eroarea nu se anulează neapărat peste tot. $X_M(\omega)$ poate să nu conveargă peste tot la $X(\omega)$.

Fenomenul Gibbs

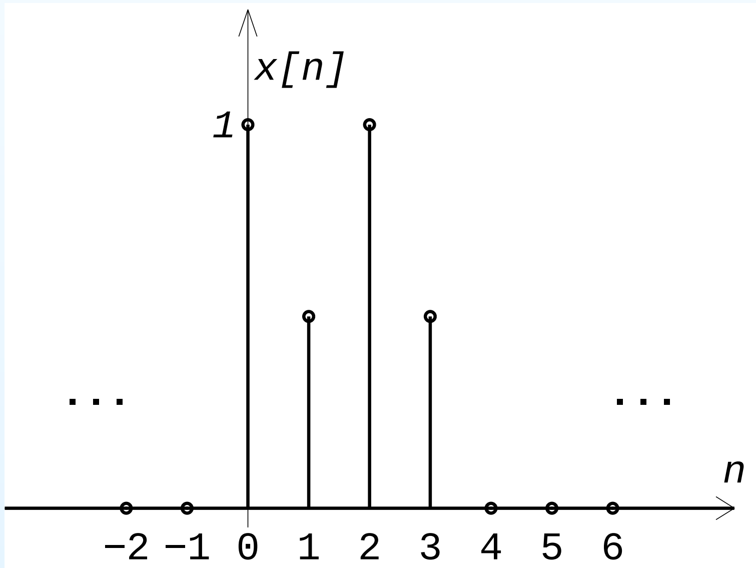


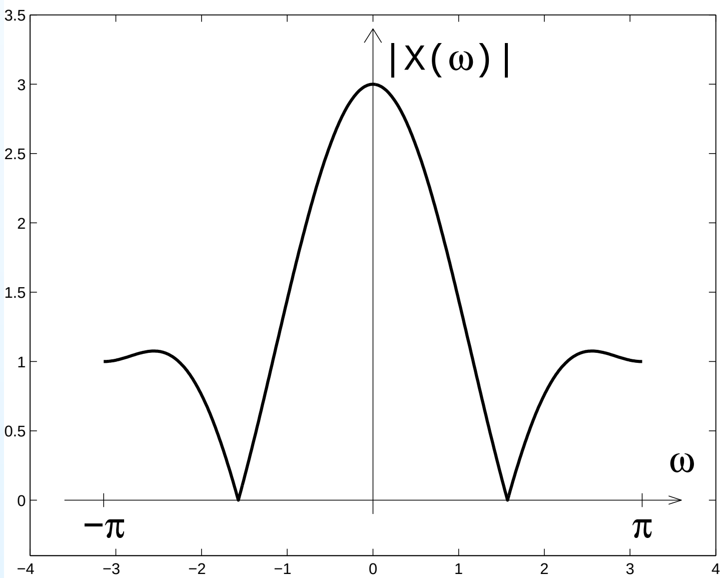
Transformata Fourier inversă

- Semnalul $x[n]$ a cărui transformată Fourier este funcţia dată $X(\omega)$ este
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega. \tag{2}$$
- Notăm $x[n] = TFI(X(\omega))$
- Funcţia $X(\omega)$ este numită *spectrul* semnalului $x[n]$
- $|X(\omega)|$ este amplitudinea (magnitudinea) spectrului
- arg$X(\omega)$ este faza spectrului
- $|X(\omega)|^2$ este numită *densitate de energie spectrală* (vezi mai departe teorema lui Parseval)

Semnificaţia transformatei Fourier

- $X(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, reprezintă conţinutul în frecvenţă al semnalului $x[n]$
- Exemplu: semnal cu suport finit şi spectrul lui





TF a unei sinusoide complexe (1)

- Sinusoida complexă $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ nu are energie finită, deci seria (1) nu este convergentă.
- Totuşi, îi putem asocia TF

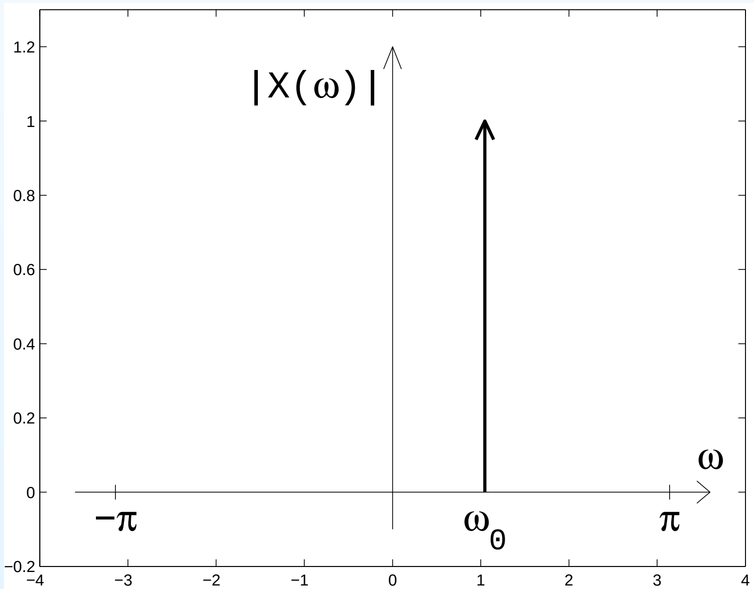
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi\ell + \omega - \omega_0),$$

unde $\delta(\omega)$ este impulsul Dirac situat în origine.
- Verificare:

$$TFI(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

TF a unei sinusoide complexe (2)

- Interpretare: semnalul sinusoidal are un spectru nenul într-o singură frecvenţă, în care se concentrează toată energie sa.
- Un spectru de acest tip se numeşte şi spectru de linii (una singură, în cazul de faţă).

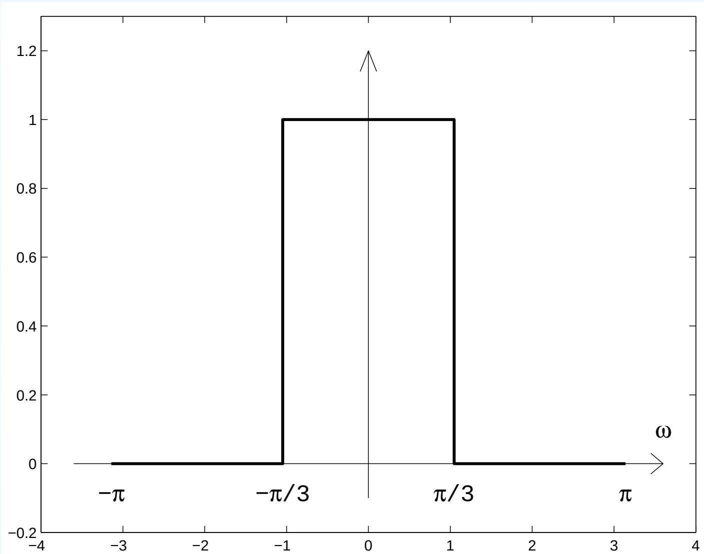


Spectru ideal de joasă frecvenţă (1)

- Dorim semnalul $x[n]$ al cărui spectru este

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{pentru } \omega_t < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

- Semnalul $x[n]$ are un spectru ideal de joasă frecvenţă.



$$x[n] = ?$$

Spectru ideal de joasă frecvenţă (2)

- Def. Funcţia sinc (*nucleul Dirichlet*) este

$$\text{sinc}\,\omega = \frac{\sin\omega}{\omega}.$$

- Folosind transformata Fourier inversă obţinem

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_t}^{\omega_t} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_t}^{\omega_t} \\ &= \frac{\sin(\omega_t n)}{\pi n} = \frac{\omega_t}{\pi}\text{sinc}(\omega_t n). \end{aligned}$$

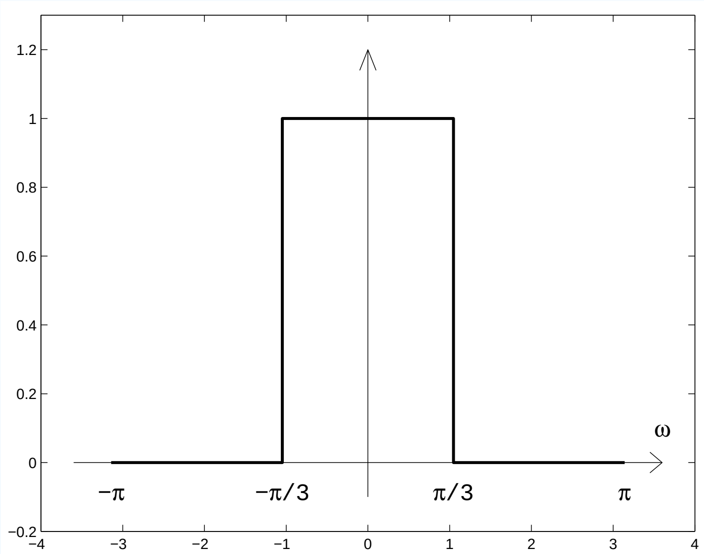
- Am obţinut deci egalitatea

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_t n)}{\pi n} e^{-j\omega n} = \frac{\omega_t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\omega_t n) e^{-j\omega n}.$$

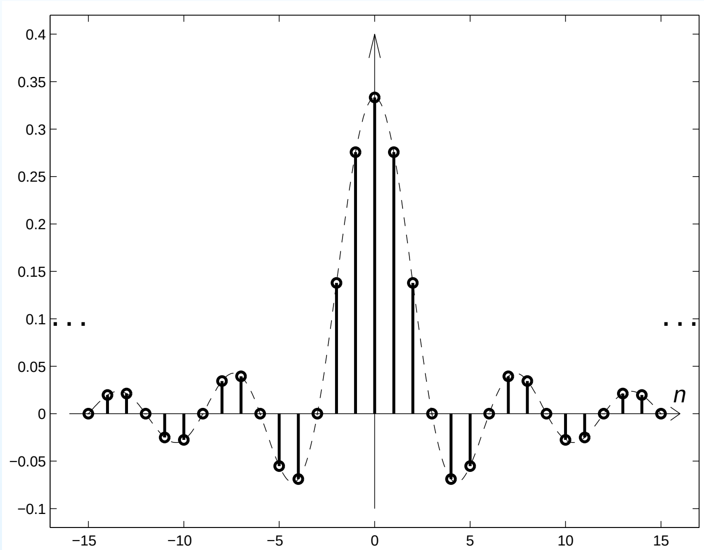
Spectru ideal de joasă frecvenţă (3)

- Pentru $\omega_t = \pi/3$

$X(\omega)$



$x[n]$



Demonstraţie TF inversă (1)

Prop: dacă m este întreg, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = 2\pi\delta[m] = \begin{cases} 2\pi, & \text{dacă } m = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Dem: calcul direct.
- Pentru $m = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi$$

- Pentru $m \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} d\omega = \frac{1}{jm} e^{j\omega m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2j\sin(m\pi)}{jm} = 0,$$

Demonstraţie TF inversă (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)}d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\
&= x[n].
\end{aligned}
$$

Proprietăţi TF (1)

- *Liniaritate*: $TF(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \cdot TF(x[n]) + \beta \cdot TF(y[n])$
- *Întârziere*. Fie $n_0 \in \mathbb{Z}$ şi $y[n] = x[n - n_0]$ (i.e. $y[n]$ este semnalul $x[n]$ întârziat cu n_0). Atunci $Y(\omega) = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$.
- *Complex conjugare*. Fie $y[n] = x^*[n]$. Atunci

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \right)^* = X^*(-\omega).$$

- *Simetrii pentru semnale reale*. Dacă $x[n] \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & X(-\omega) = X^*(\omega), & & \\ & \text{Re} X(\omega) = \text{Re} X(-\omega), & & \text{Im} X(\omega) = -\text{Im} X(-\omega), \\ & |X(\omega)| = |X(-\omega)|, & & \arg X(\omega) = -\arg X(-\omega). \end{aligned}$$

Proprietăţi TF (2)

- *Convoluţie:*

$$\begin{aligned} TF(x[n]*y[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\omega(n-k)} \\ &= X(\omega)Y(\omega) \end{aligned}$$

- *Modulaţie în timp:*

$$TF(x[n]y[n]) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)Y(\omega-\theta)d\theta.$$

Teorema lui Parseval

- Forma generală:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega.$$

- Punând $y[n] = x[n]$ rezultă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

- Semnificaţie: energia în timp = energia în frecvenţă

Demonstraţie Parseval

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*[k]e^{j\omega k}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[k]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)}d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]\end{aligned}$$

Transformata Z

- Transformata Z (bilaterală) a unui semnal discret $x[n]$ este funcţia $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

  Notaţie: $X(z) = TZ(x[n])$

- Transformata Fourier este un caz particular al transformatei Z, pentru $z = e^{j\omega}$.
- Notaţia $X(e^{j\omega})$ pentru transformata Fourier (spre deosebire de notaţia naturală $X(\omega)$) subliniază această legătură.

Convergenţă

- Pentru marea majoritate a semnalelor, transformata Z există într-o anume regiune a planului complex, care nu conţine neapărat cercul unitate.
- Semnale care nu au transformată Fourier pot avea transformată Z.
- Exemplu: $x[n] = \alpha^n u[n], \quad \alpha \in \mathbb{C}$
- $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
- Seria converge pentru $|z| > |\alpha|$
- Dacă $|\alpha| \geq 1$, transformata Fourier nu există
- Dacă $|\alpha| < 1$, atunci $X(e^{j\omega}) \triangleq X(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$.

Proprietăţi ale transformatei Z

- *Liniaritate.* Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avem $TZ(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \cdot TZ(x[n]) + \beta \cdot TZ(y[n])$.
- *Întârziere.* Dacă $y[n] = x[n - n_0]$, atunci $Y(z) = z^{-n_0} X(z)$
- Pentru $n_0 = 1$, rezultă $Y(z) = z^{-1} X(z)$. De aceea, z^{-1} se numeşte şi operator de întârziere cu un pas (eşantion).
- *Înmulţirea cu o exponenţială.* Dacă $y[n] = \alpha^n x[n]$, atunci $Y(z) = X(z/\alpha)$
- *Derivare după z.* $TZ(nx[n]) = -z \frac{dX(z)}{dz}$
- *Convoluţie.* $TZ(x[n] * y[n]) = X(z) \cdot Y(z)$

(Transformata Z inversă)

- Transformata Z inversă, care asociază unei funcţii $X(z)$ semnalul $x[n]$ (a cărui transformată Z este $X(z)$) este

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz.$$

- Integrala se calculează pe un contur închis în jurul originii în planul complex, parcurs în sens invers acelor de ceas; conturul este situat în regiunea de convergenţă a transformatei Z pentru semnalul $x[n]$.

Variabile aleatoare

- O *variabilă aleatoare* reală ξ este caracterizată de funcţia de *densitate de probabilitate* $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi = 1.$$

- Probabilitatea ca valoarea variabilei aleatoare să se afle într-un interval precizat $[\xi_1, \xi_2]$ este

$$\text{Prob}(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi) d\xi.$$

Medie, varianţă

- *Media* variabilei aleatoare ξ este

$$\mu = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi.$$

  Operatorul $E\{\cdot\}$ se numeşte speranţă matematică (sau expectaţie).

- *Varianţa* variabilei aleatoare ξ este

$$\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 p(\xi) d\xi.$$

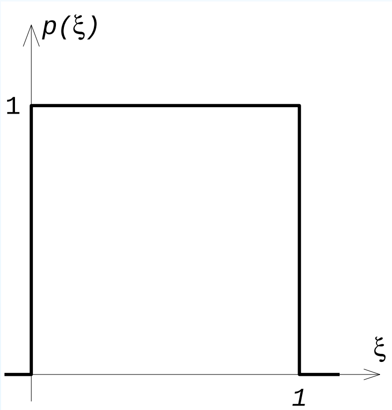
- Relaţie între varianţă şi medie

$$\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = E\{\xi^2\} - 2\mu E\{\xi\} + \mu^2 = E\{\xi^2\} - \mu^2$$

Distribuţie uniformă

- O variabilă aleatoare cu distribuţie uniformă în intervalul $[0,1]$ are densitatea de probabilitate

$$p(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \xi \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



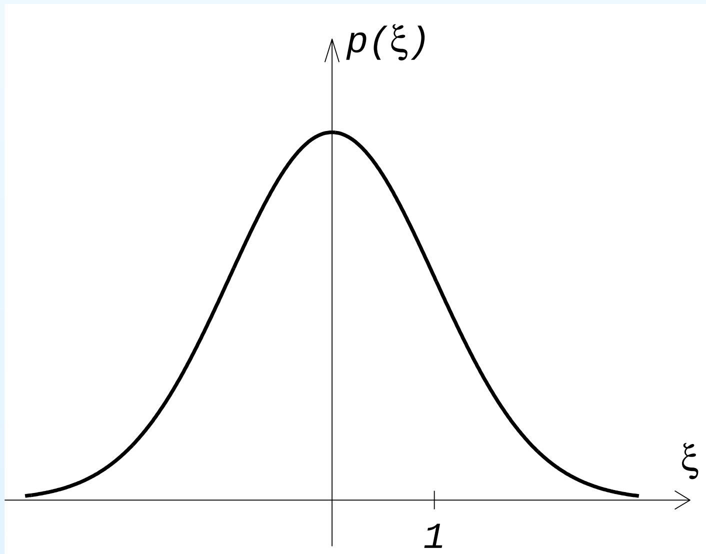
- Media este $\mu = \int_0^1 \xi d\xi = 1/2$
- Varianţa este $\sigma^2 = \int_0^1 \xi^2 d\xi - \mu^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Distribuţie normală

- O variabilă aleatoare cu distribuţie gaussiană (sau normală) de medie μ şi varianţă σ^2 are densitatea de probabilitate

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Notaţie uzuală a acestei distribuţii: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



Proces aleator, semnal aleator

- Un proces aleator $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, este un şir de variabile aleatoare
- Un semnal aleator, notat tot $x[n]$, este o realizare a procesului aleator, în sensul că, la fiecare moment de timp n, se consideră o singură valoare a variabilei aleatoare corespunzătoare.
- Exemplu: $x[n]$ este uniform distribuit în $[0, 1]$, pentru orice n
- Proces *staţionar*: proprietăţile variabilelor aleatoare nu se modifică în timp (nu depind de n)
- De acum înainte lucrăm doar cu procese staţionare

Autocorelaţii

- *Autocorelaţiile* unui proces aleator reprezintă speranţele matematice ale produselor variabilelor aleatoare la diferite momente de timp:

$$E\{x[n]x[n-k]\} = r[k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Se observă că $r[k] = r[-k]$.
- *Autocovarianţele* unui proces aleator staţionar sunt autocorelaţiile procesului $x[n] - \mu$ (care are medie nulă)

$$E\{(x[n]-\mu)(x[n-k]-\mu)\} = \rho[k].$$

- Pentru procese cu medie nulă, avem $r[k] = \rho[k]$.

Estimarea mediei

- Problemă: avem o *realizare* finită a unui proces aleator, adică *valorile* $x[n]$, $n = 0 : N-1$. Cum estimăm valorile mediei şi autocorelaţiilor ?
- Pentru medie, cea mai naturală estimaţie este

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

- Estimaţia este nedeviată:

$$E\{\hat{\mu}\} = E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E\{x[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu = \mu.$$

Estimarea autocorelaţiilor

- Estimaţia nedeviată

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

(adică $E\{\hat{r}[k]\} = r[k]$)

- Esimaţia deviată e folosită mai des

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Densitate de putere spectrală

- Un semnal $x[n]$ care este realizarea unui proces aleator are energie infinită
- Deci, nu putem calcula densitatea de energie spectrală $|X(\omega)|^2$
- Densitatea de *putere* spectrală este transformata Fourier a secvenţei de autocorelaţii

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\omega k}.$$

- Definiţie echivalentă ("putere $=$ energie/timp")

$$P(\omega) = \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}.$$

Zgomot alb

- Un *zgomot alb* de medie nulă şi varianţă σ^2 este un proces aleator $w[n]$ pentru care

$$\begin{aligned} E\{w[n]\} &= 0, \\ E\{w[n]w[n-k]\} &= \sigma^2\delta[k]. \end{aligned}$$

- Densitatea de putere spectrală este

$$P(\omega) = \sigma^2$$

- Spectrul zgomotului alb este constant (zgomotul alb conţine toate frecvenţele cu putere egală, de aici numele său, prin analogie cu lumina).