Prelucrarea semnalelor

Capitolul 3: Eşantionare

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Cuprins

- Eşantionare (conversie analog-numeric)
- Conversie numeric-analogic
- Schimbarea frecvenţei de eşantionare
  - Decimare
  - Interpolare
  - Schimbarea frecvenţei de eşantionare cu un factor raţional

Eşantionare—generalităţi

- Un semnal în timp continuu este o funcţie $x_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_a(t)$ este valoarea semnalului în momentul $t \in \mathbb{R}$.
  Notăm $x_a(t)$ şi întreg semnalul
- Numim x_a *semnal analogic* sau *semnal continuu* (chiar dacă funcţia x_a nu este continuă)
- Eşantionarea este transformarea unui semnal analogic într-unul discret, prin alegerea unei mulţimi numărabile de valori ale semnalului
- Suportul semnalului se reduce de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{Z}$

Eşantionare—definiţie

- Fie $x_a(t)$ un semnal analogic şi $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o mulţime numărabilă de valori reale distincte ordonate, i.e. $t_n < t_m$ dacă $n < m$
- Eşantionarea este transformarea semnalului $x_a(t)$ în semnalul discret $x[n]$ definit prin

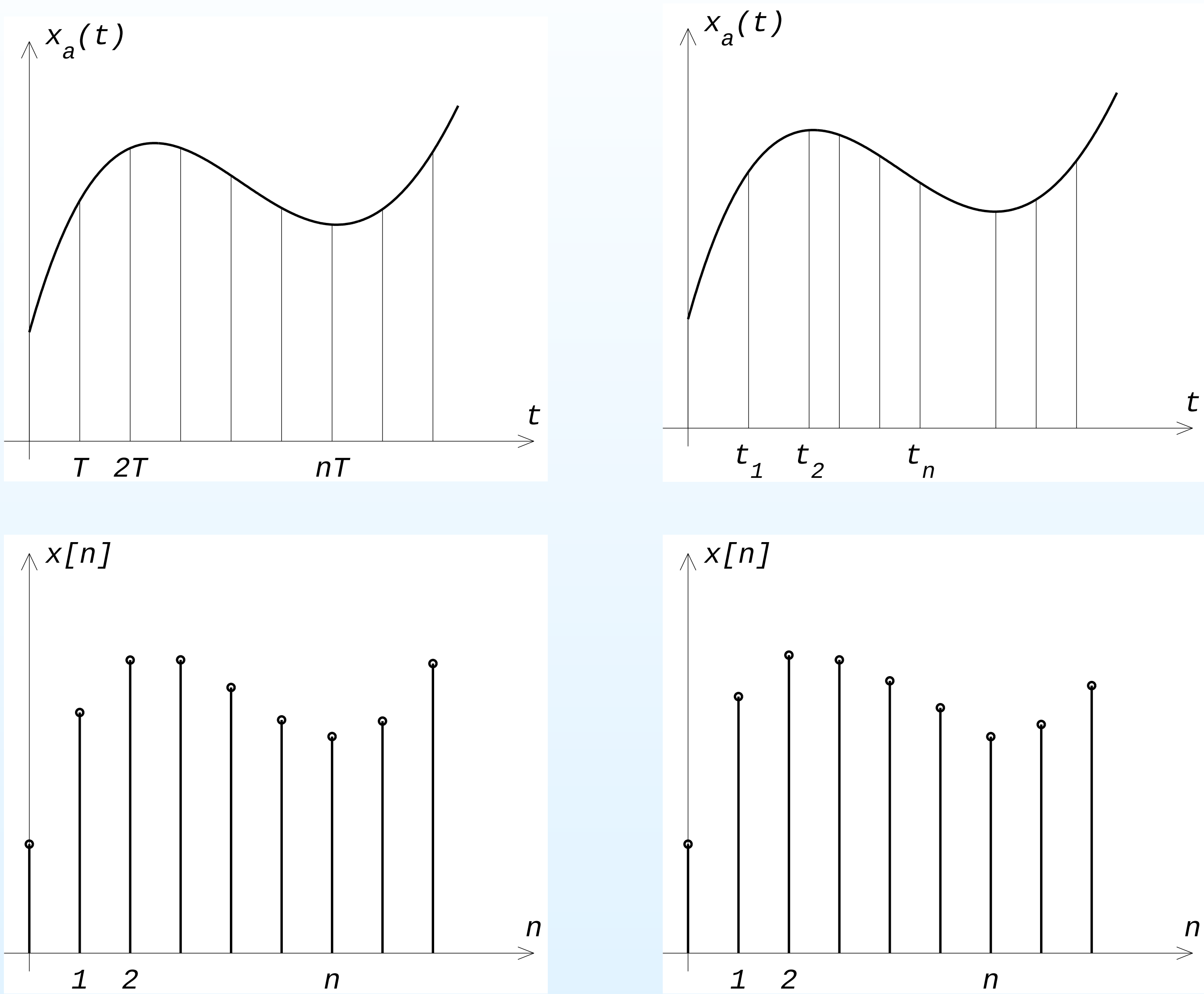
$$x[n] = x_a(t_n)$$

- Dacă $t_n = nT$, unde $T > 0$ este perioada de eşantionare, atunci eşantionarea este *uniformă*:

$$x[n] = x_a(nT)$$

- Ne ocupăm doar de eşantionare uniformă

Eşantionare uniformă şi neuniformă



Spectrul unui semnal analogic

- Spectrul unui semnal analogic $x_a(t)$ este transformata Fourier a semnalului

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

- Notăm pe scurt $X_a(\Omega) = TF(x_a(t))$
- Folosim şi notaţia $X_a(j\Omega)$ cu aceeaşi semnificaţie ca $X_a(\Omega)$
- În general, $X_a(\Omega)$ nu este o funcţie periodică
- Transformata Fourier inversă:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- Dacă semnalul $x_a(t)$ are energie finită, transformata sa Fourier există (aproape peste tot)

Eşantionarea şi spectrul

- Spectrul semnalului eşantionat este transformata Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Întrebări naturale:
  - Care este relaţia între $X_a(\Omega)$ şi $X(\omega)$?
  - Ce (din spectrul semnalului analogic) se pierde prin eşantionare ?
  - Când nu se pierde nimic ? (Este posibil acest caz ?)

Transformarea spectrului la eşantionare

- Fie $x_a(t)$ un semnal analogic cu energie finită
- $x[n]$ este semnalul discret obţinut din x_a prin eşantionare cu perioada T
- Între spectrele celor două semnale are loc relaţia

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{T}\right), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

- Pentru o frecvenţă ω fixată, spectrul $X(\omega)$ al semnalului eşantionat este o sumă infinită de valori $X_a(\Omega_\ell)$, cu $\Omega_\ell \in [(2\ell - 1)\pi/T, (2\ell + 1)\pi/T]$, $\ell \in \mathbb{Z}$

Demonstraţie (1)

- Folosind expresia transformatei Fourier inverse, putem scrie

$$\begin{aligned} x[n] &= x_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\int_{(2\ell-1)\pi/T}^{(2\ell+1)\pi/T} X_a(\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega \end{aligned}$$

- În fiecare interval $[(2\ell-1)\pi/T, (2\ell+1)\pi/T]$, substituim $\Omega \leftarrow \Omega + 2\ell\pi/T$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a(\Omega + 2\ell\pi/T)e^{j\Omega nT}d\Omega$$

Demonstraţie (2)

- Substituim acum $\boxed{\Omega = \omega/T}$
- Obţinem

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

- Comparăm relaţia de mai sus cu TF inversă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- Prin identificare rezultă

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{T}\right), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

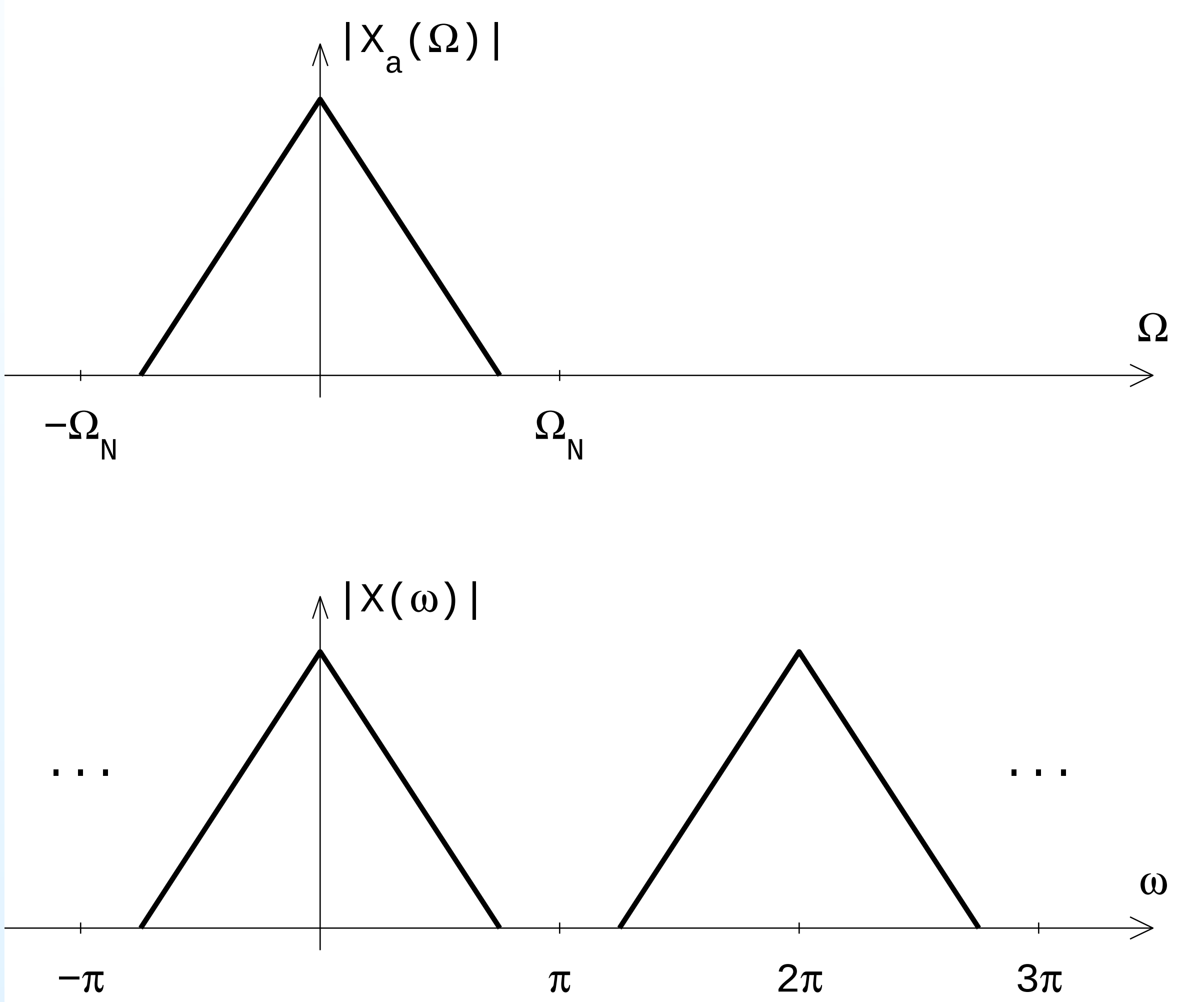
Eşantionare corectă

- Notăm $\Omega_N = \pi/T$
- Presupunem că *semnalul analogic are spectrul limitat la banda* $[-\Omega_N, \Omega_N]$, deci $X_a(\Omega) = 0$, pentru $|\Omega| > \Omega_N$
- Spectrul semnalului eşantionat este

$$X(\omega) = \frac{1}{T} X_a(\omega/T), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

- Concluzie: *spectrul semnalului eşantionat este esenţialmente egal cu cel al semnalului analogic*
- Frecvenţa Ω_N, egală cu jumătatea frecvenţei de eşantionare $\Omega_e = 2\pi/T$, se numeşte *frecvenţă Nyquist*

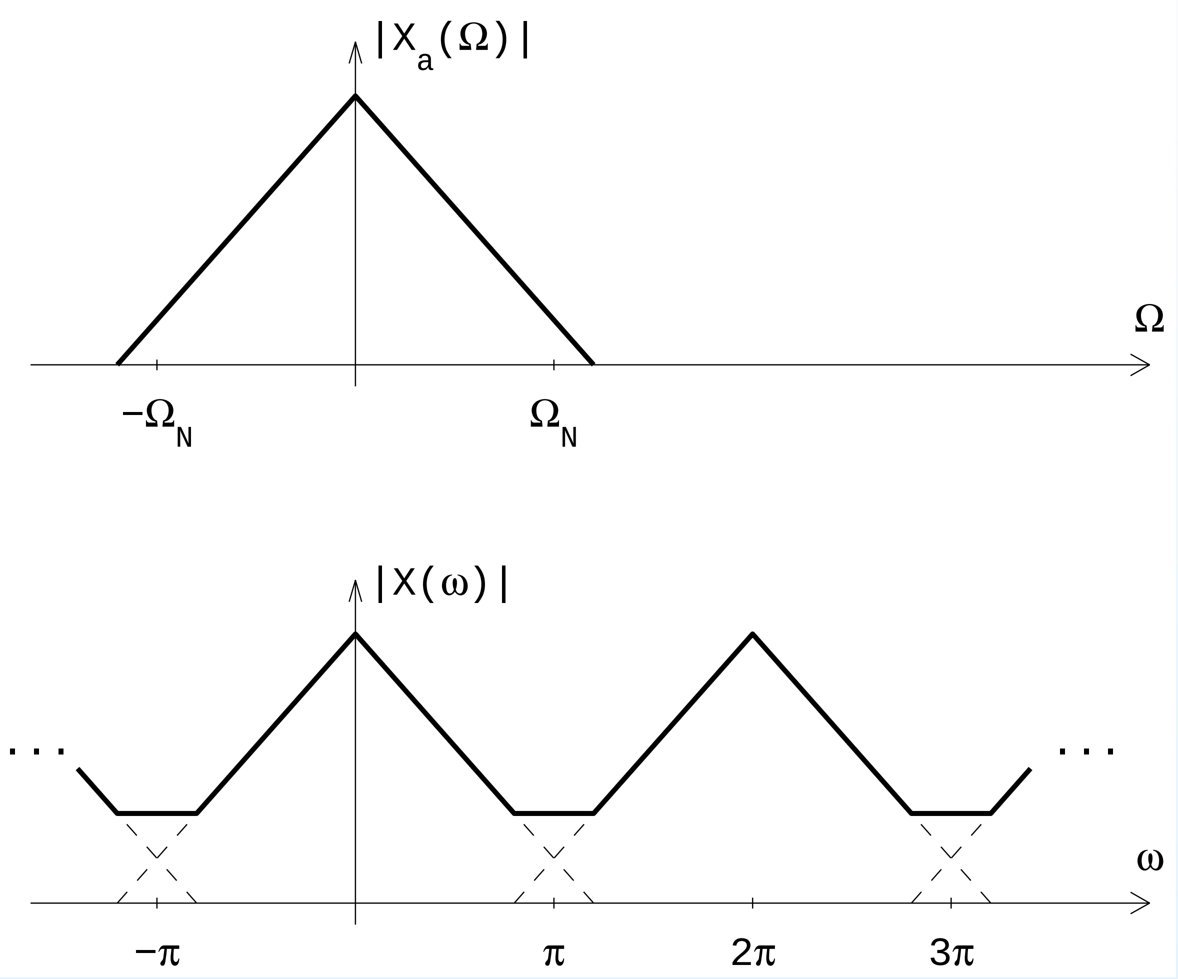
Eşantionare corectă—exemplu



Aliere

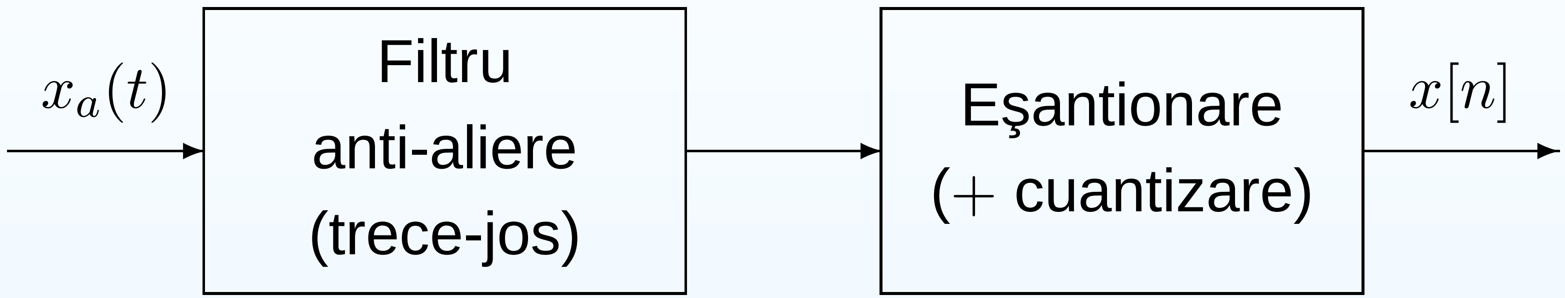
- Dacă spectrul semnalului analogic se întinde dincolo de frecvenţa Nyquist, atunci spectrul semnalului eşantionat nu mai este egal cu cel al semnalului analogic
- Spectrul discret este obţinut din suma unor porţiuni ale spectrului analogic
- Fenomenul se numeşte *aliere*

Aliere—exemplu



Conversia analog-numeric

- Schema practică de eşantionare



- Filtrul anti-aliere este un filtru analogic trece-jos, cu frecvenţa de tăiere egală cu frecvenţa Nyquist $\Omega_N = \Omega_e/2$
- Frecvenţa de eşantionare este aleasă astfel încât spectrul semnalului analogic util $x_a(t)$ să fie practic nul deasupra frecvenţei Nyquist; filtrul anti-aliere este folosit pentru a preveni alierea în cazul alterării semnalului util cu zgomot de înaltă frecvenţă
- Convertorul analog-numeric face de regulă şi *cuantizarea* semnalului eşantionat—i.e. reprezentarea fiecărui eşantion pe un număr fixat de biţi

Conversia numeric-analogic

- CNA este operaţia de transformare a unui semnal discret $x[n]$ într-un semnal analogic $x_a(t)$
- Perioada de eşantionare T este cunoscută
- Problema fundamentală: dacă semnalul discret a fost obţinut prin eşantionare, i.e. $x[n] = x_a(nT)$, putem reface semnalul analogic doar din semnalul discret ?
- Răspuns: DA, dacă eşantionarea a fost corectă (dacă spectrul semnalului analogic este nul în afara intervalului $[-\pi/T, \pi/T]$)
- În acest caz spectrele semnalelor discret şi analogic sunt identice (modulo scalări)
- Deci, intuitiv, semnalele discret şi analogic conţin aceeaşi informaţie şi se pot transforma unul într-altul

Refacerea semnalului analogic

- Fie $x_a(t)$ un semnal analogic şi $x[n] = x_a(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, semnalul discret obţinut din $x_a(t)$ prin eşantionare uniformă cu perioada T
- Presupunem că semnalul analogic are spectrul de bandă limitată, i.e. $X_a(\Omega) = 0$ pentru $|\Omega| > \Omega_N$, unde $\Omega_N = \pi/T$ este frecvenţa Nyquist
- Atunci are loc egalitatea (Whittaker 1935, Shannon 1949)

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T} \qquad (1)$$

Nucleul sinc

- Funcţiile sinc analogice (cu argument deplasat)

$$s_n(t) = \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} = s_0(t - nT)$$

- Funcţiile sinc sunt ortogonale

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_n(t) s_m(t) dt = T\delta[n - m]$$

- Egalitatea (1) poate fi scrisă $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] s_n(t)$
- Orice semnal analogic cu spectru limitat poate fi reprezentat în baza ortogonală (numărabilă !) formată de funcţiile sinc (numită şi nucleu sinc), pentru un T convenabil ales

Demonstraţie (1)

- Spectrul semnalului analogic fiind limitat, TF este

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_a(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \end{aligned}$$

- Cu schimbarea $\Omega = \omega/T$ rezultă

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi} X_a(\omega/T)e^{j\omega t/T}d\omega$$

- Folosind relaţia dintre spectre $X(\omega) = \frac{1}{T}X_a(\omega/T)$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega t/T}d\omega$$

Demonstraţie (2)

- Înlocuind cu definiţia TF (în timp discret)

$$
\begin{aligned}
x_a(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right)e^{j\omega t/T}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(t-nT)/T}d\omega
\end{aligned}
$$

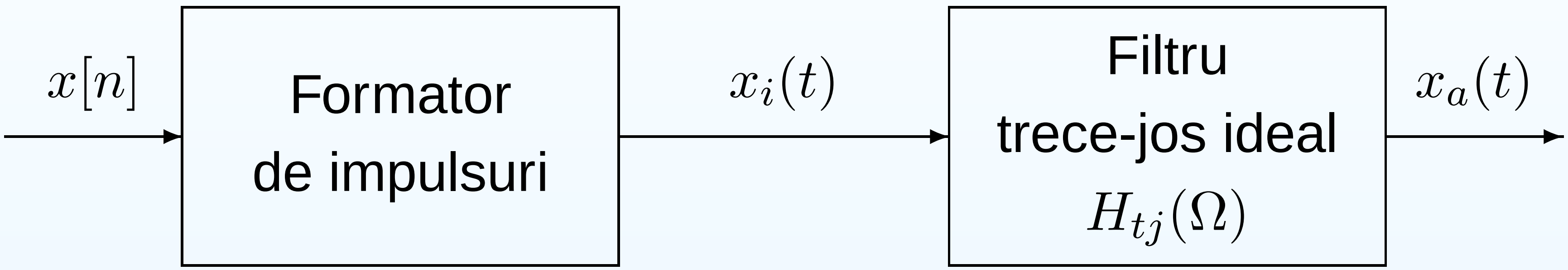
- Ţinând seama că

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$$

rezultă identitatea dorită $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$

Convertorul numeric-analogic ideal (1)

- Egalitatea (1) poate fi interpretată prin schema

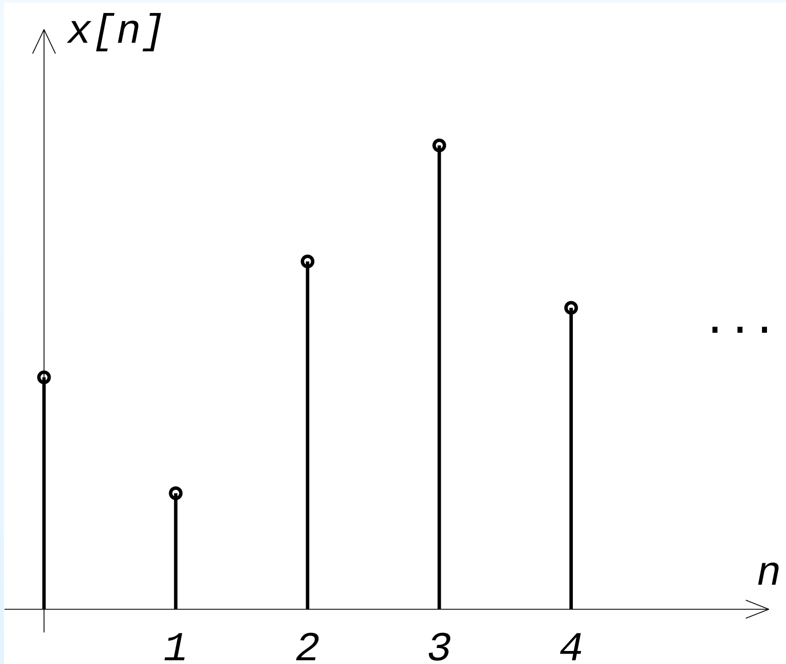


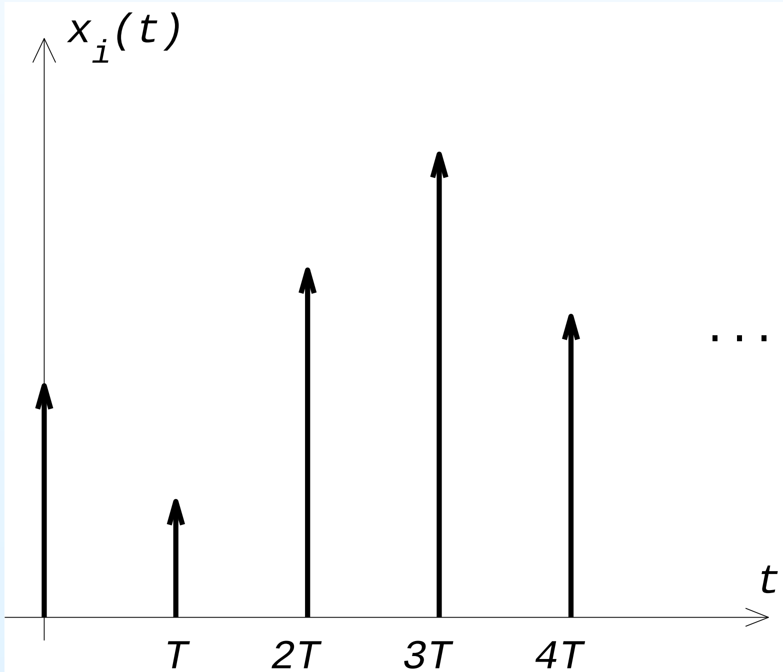
- CNA ideal nu poate fi implementat în practică (filtrul ideal e necauzal şi are suport infinit)
- De altfel, din (1) rezultă că pentru fiecare moment de timp t, valoarea $x_a(t)$ depinde de *toate* eşantioanele semnalului discret

Convertorul numeric-analogic ideal (2)

- Formatorul de impulsuri transformă semnalul discret $x[n]$ în semnalul analogic

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$





Convertorul numeric-analogic ideal (3)

- Filtrul analogic $H_{tj}(\Omega)$ este un filtru trece-jos ideal cu banda de trecere $[0, \Omega_N]$, i.e.

$$H_{tj}(\Omega) = \begin{cases} T, & \text{pentru } \; |\Omega| \leq \Omega_N \\ 0, & \text{pentru } \; |\Omega| > \Omega_N \end{cases}$$

- Răspunsul său la impuls este $h_{tj}(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$
- Schema CNA ideal spune că

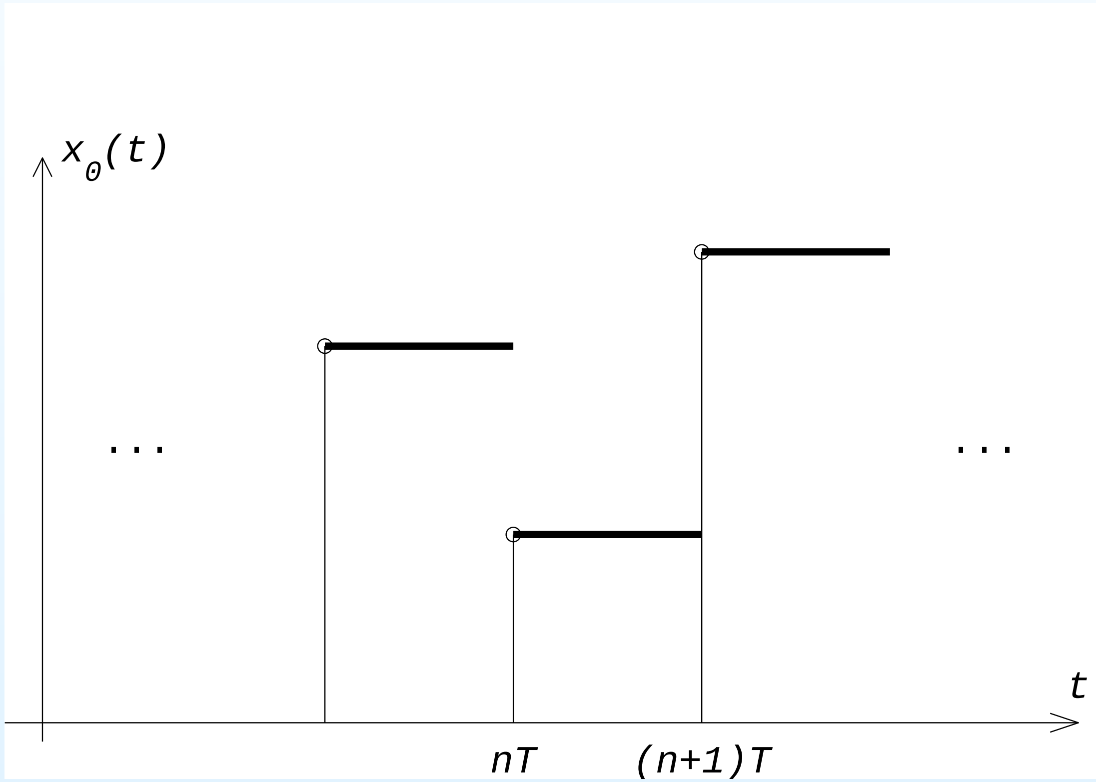
$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(\tau) h_{tj}(t-\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_{tj}(t - nT)$$

adică exact (1)

Interpolare de ordinul zero

- Semnalul analogic este constant pe durate egale cu perioada de eşantionare T:

$$x_0(t) = x[\lfloor t/T \rfloor]$$



Filtru de interpolare de ordinul zero (1)

- În schema CNA ideal, înlocuim filtrul ideal $H_{tj}(\Omega)$, cu un filtru $H_0(\Omega)$, astfel încât la ieşire să se obţină semnalul $x_0(t)$
- Notând $h_0(t)$ răspunsul la impuls al filtrului $H_0(\Omega)$, ieşirea interpolatorului de ordinul zero este

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT)$$

- Pentru a obţine $x_0(t) = x[\lfloor t/T \rfloor]$, răspunsul la impuls trebuie să fie

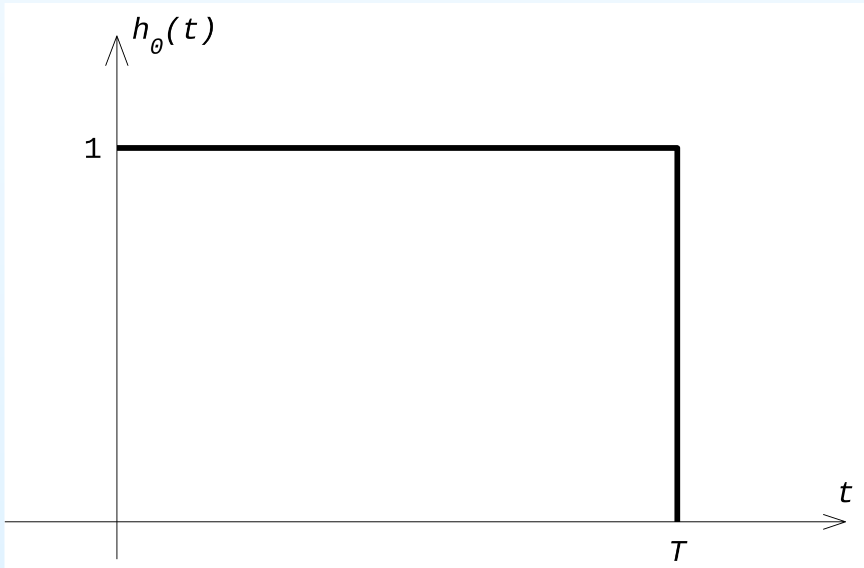
$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru} \;\; t \in [0, T) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

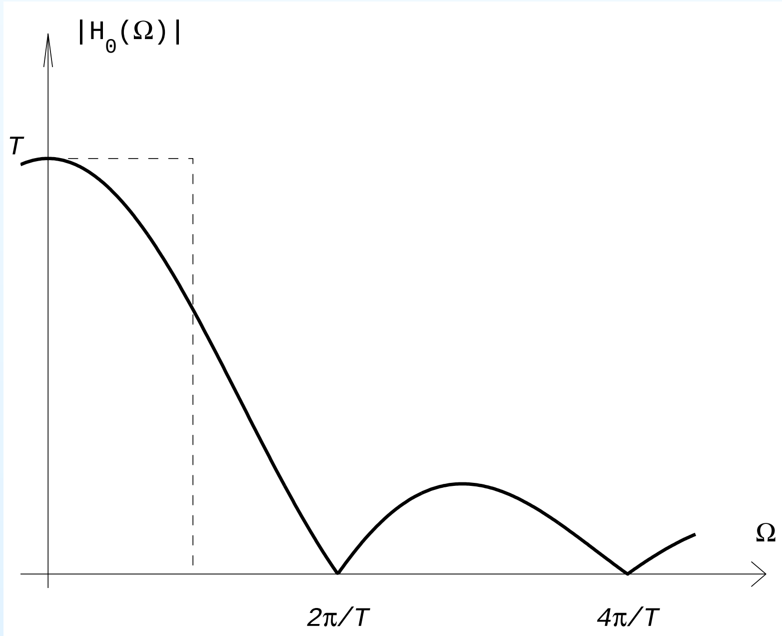
Filtru de interpolare de ordinul zero (2)

- Răspunsul în frecvenţă este

$$H_0(\Omega) = \int_0^T e^{-j\Omega t} dt = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}$$

- Filtrul este trece-jos, dar aproximează grosier răspunsul ideal

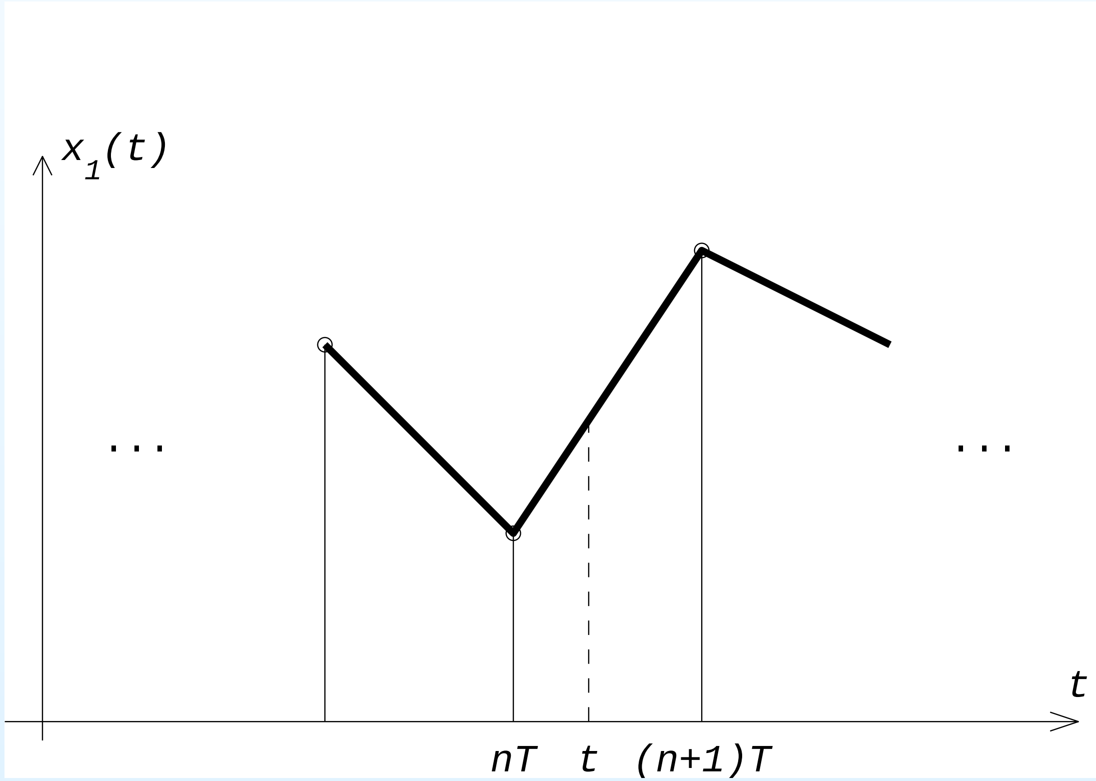




Interpolare de ordinul unu

- Semnalul analogic este obţinut prin unirea eşantioanelor semnalului discret prin segmente de dreapta:

$$x_1(t) = \frac{(t - nT)x[n+1] + ((n+1)T - t)x[n]}{T}, \;\; t \in [nT, (n+1)T)$$



Filtru de interpolare de ordinul unu (1)

- În CNA ideal, filtrul ideal $H_{tj}(\Omega) \longrightarrow H_1(\Omega)$
- $h_1(t)$ este răspunsul la impuls al filtrului $H_1(\Omega)$
- Identificăm $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_1(t-nT)$ cu

$$x_1(t) = \frac{t-(n+1)T+T}{T}x[n+1] + \frac{-t+nT+T}{T}x[n]$$

- Rezultă răspunsul la impuls

$$h_1(t) = \begin{cases} 1-|t|/T, & \text{pentru } \ |t| \le T \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Filtrul este necauzal. Devine cauzal introducând o întârziere egală cu T

Filtru de interpolare de ordinul unu (2)

- Răspunsul în frecvenţă este

$$\begin{aligned} H_1(\Omega) &= \int_{-T}^{T} (1 - |t|/T) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega} \right|_{-T}^{T} - \frac{1}{T} \int_0^T t(e^{-j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) dt \\ &= \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega} - \frac{2}{T} \int_0^T t\cos(\Omega t) dt \end{aligned}$$

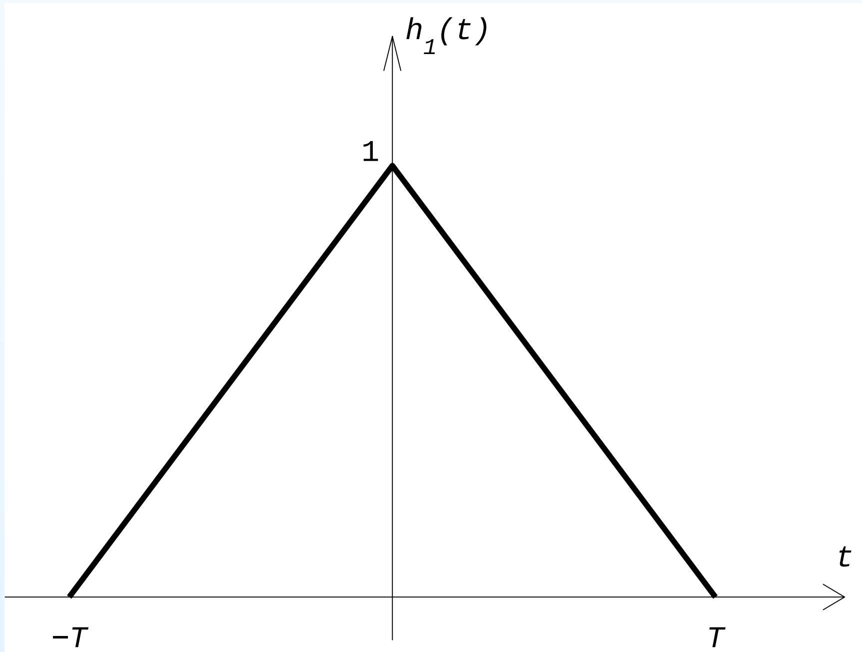
- Un calcul elementar arată că

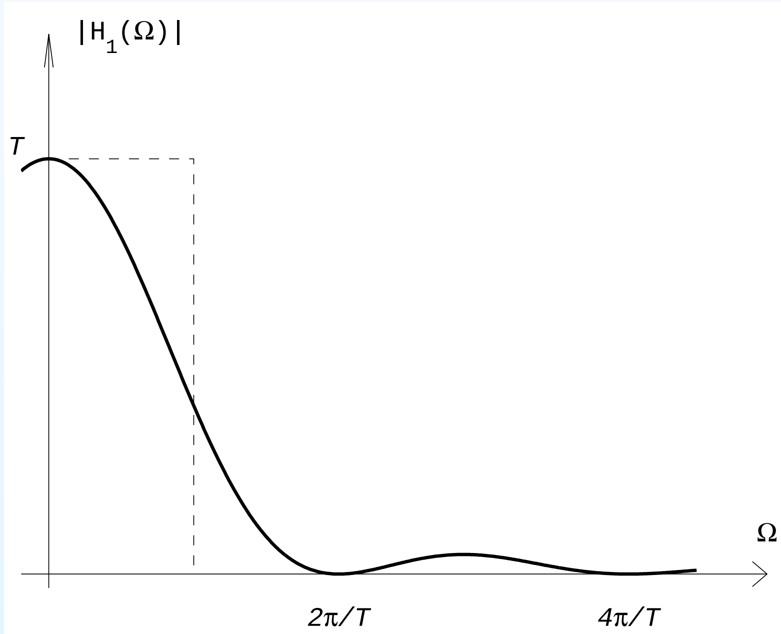
$$\int_0^T t\cos(\Omega t) dt = \frac{T\sin(\Omega T)}{\Omega} - \frac{2\sin^2(\Omega T/2)}{\Omega^2}$$

Filtru de interpolare de ordinul unu (3)

- Obţinem răspunsul în frecvenţă

$$H_1(\Omega) = \frac{4\sin^2(\Omega T/2)}{T\Omega^2} = \frac{1}{T}|H_0(\Omega)|^2$$





Schimbarea frecvenţei de eşantionare (1)

- Problema: schimbarea frecvenţei de eşantionare a unui semnal analogic $x_a(t)$, dispunând *numai* de un semnal discret $x[n]$, obţinut printr-o eşantionare anterioară din semnalul $x_a(t)$
- Notăm T perioada primei eşantionări (deci $x[n] = x_a(nT)$)
- Fie T_1 noua perioadă de eşantionare
- Căutăm semnalul discret $y[n]$ astfel încât

$$y[n] = x_a(nT_1)$$

- Numim $x[n]$ semnalul *iniţial*, $y[n]$ semnalul *reeşantionat*
- Obţinerea egalităţii este în general imposibilă
- Dorim ca măcar spectrele $X(\omega)$ şi $Y(\omega)$ să fie apropiate

Schimbarea frecvenţei de eşantionare (2)

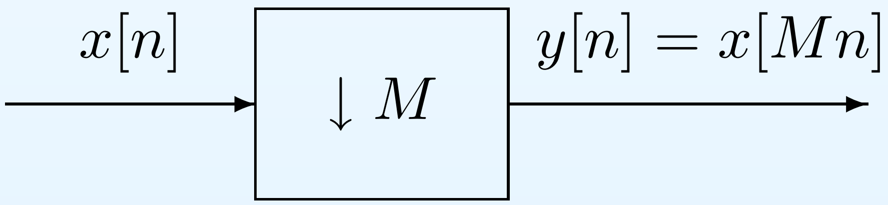
- Soluţii bune se obţin atunci când raportul T/T_1 este un număr raţional, ai cărui numărător şi numitor au valori relativ mici
- Cazurile cele mai simple:
  - T_1/T întreg: *decimare*
  - T/T_1 întreg: *interpolare*
- Aplicaţii:
  - Conversii de format (de exemplu, se creşte frecvenţa de eşantionare a unor înregistrări vechi, pentru adaptarea la noi standarde)
  - Transfer de date între sisteme care utilizează rate diferite de eşantionare
  - Redimensionarea imaginilor

Decimare

- Când $T_1/T = M \in \mathbb{N}$, frecvenţa de eşantionare se reduce de M ori
- Relaţia dintre semnalul reeşantionat şi cel iniţial este

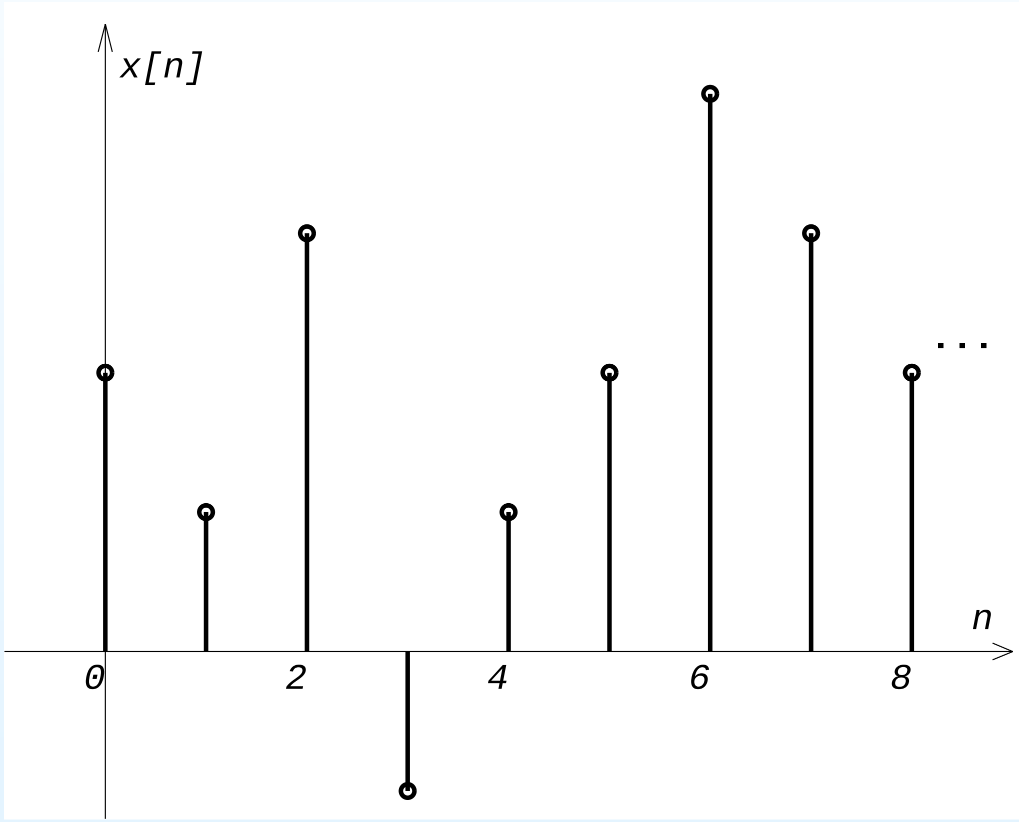
$$y[n] = x[Mn]$$

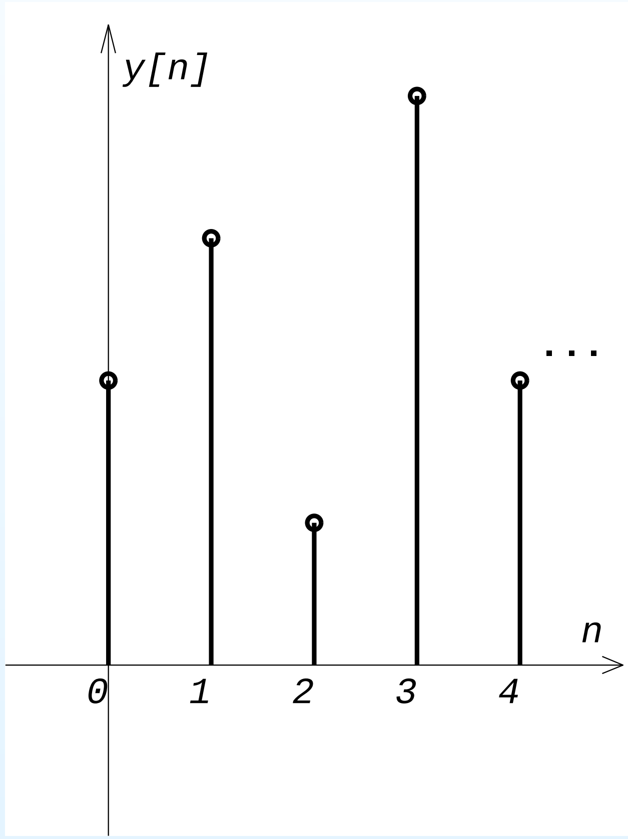
- Sistemul care realizează această operaţie se numeşte *decimator* cu factorul M



Funcţionarea în timp a decimatorului

- Un decimator cu factorul $M = 2$ elimină fiecare al doilea eşantion al intrării





Transformarea spectrului la decimare

- Fie $x[n]$ un semnal discret cu energie finită şi $y[n] = x[Mn]$ semnalul discret obţinut prin decimare cu factorul M
- Între spectrele celor două semnale are loc relaţia

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{M}\right) \tag{2}$$

- Pentru o frecvenţă ω fixată, spectrul $Y(\omega)$ al semnalului decimat este o suma a M valori ale spectrului semnalului iniţial (compară cu transformarea spectrelor la eşantionare !)

Demonstraţie (1)

- Relaţie elementară între rădăcinile de ordinul M ale unităţii

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} = \begin{cases} M, & \text{dacă } n \bmod M = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \qquad (3)$$

- Dacă $n \bmod M = 0$, atunci toţi termenii din (3) sunt 1
- Altfel

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} = \frac{1 - e^{-j2\pi n}}{1 - e^{-j2\pi n/M}} = 0$$

Demonstraţie (2)

- Termenul drept din (2) poate fi scris

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega+2\ell\pi}{M}\right) &= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\ell\pi)n/M} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n/M}\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-j2\pi\ell n/M} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n/M}\delta[n \bmod M] \\
&\overset{n\leftarrow Mn}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn]e^{-j\omega n} \\
&= Y(\omega)
\end{aligned}
$$

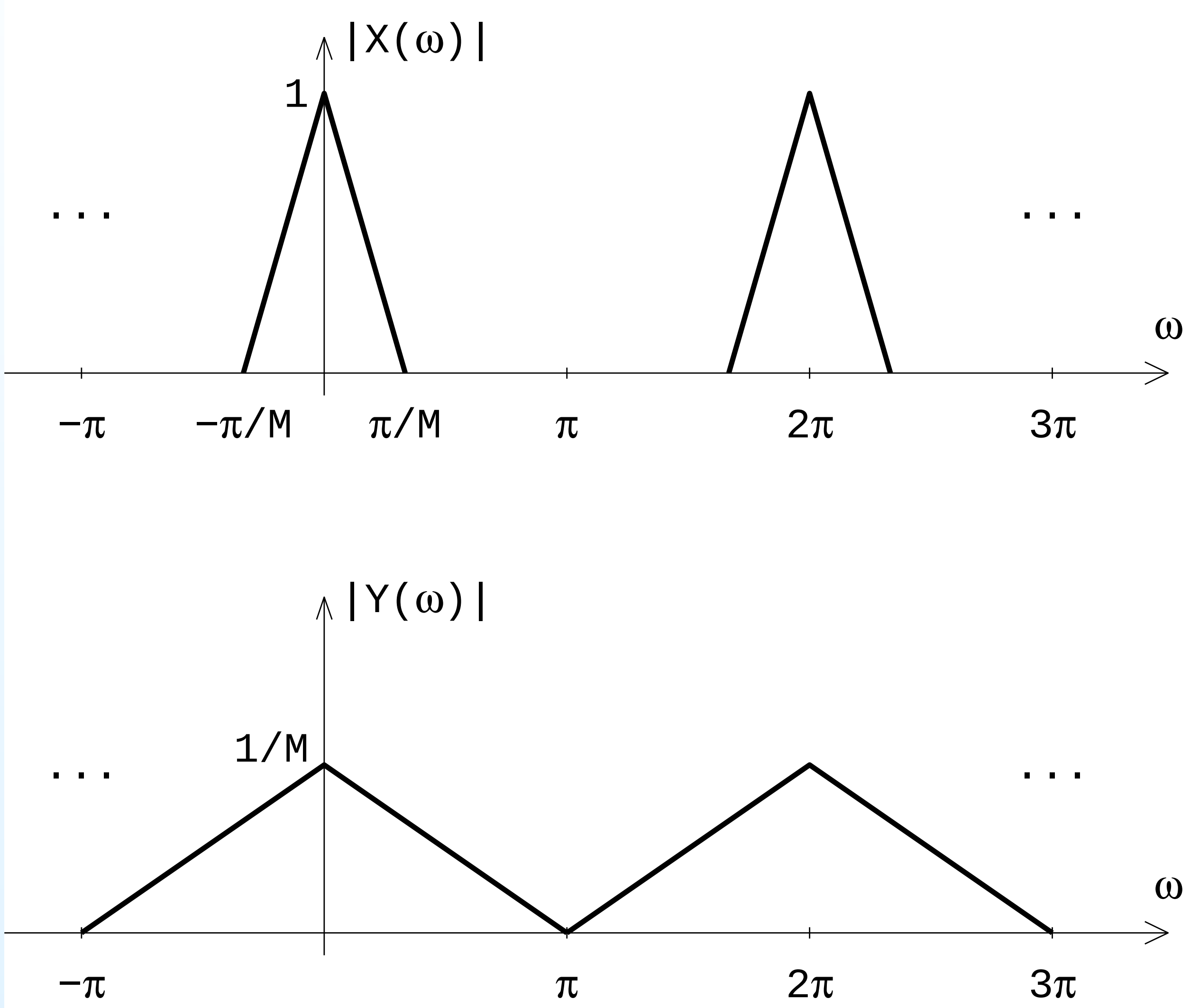
Decimare corectă

- Presupunem că semnalul iniţial are spectrul limitat la banda $[-\pi/M, \pi/M]$, deci $X(\omega) = 0$ pentru $\pi/M < |\omega| \leq \pi]$
- Spectrul semnalului decimat este

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} X(\omega/M), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

- Spectrul semnalului decimat are aceeaşi formă ca spectrul semnalului iniţial, dar expandată pe întreg intervalul $[-\pi, \pi]$
- Spectrele celor două semnale discrete corespund *aceluiaşi* spectru al semnalului analogic ! (evident, cu condiţia ca frecvenţa de eşantionare iniţială Ω_e să fi fost de cel puţin $2M$ ori mai mare decât banda de frecvenţă a semnalului analogic)

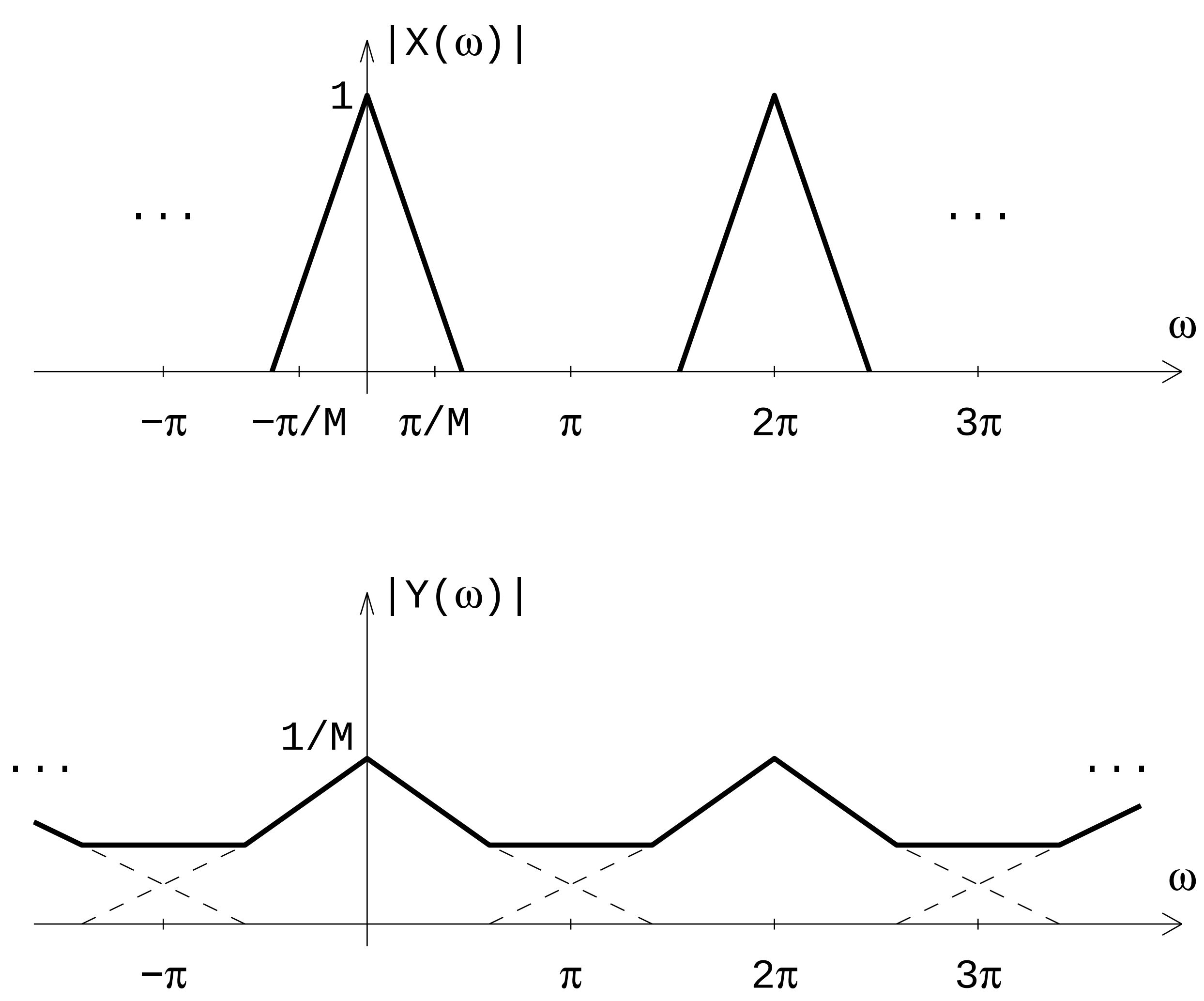
Decimare corectă—exemplu



Aliere

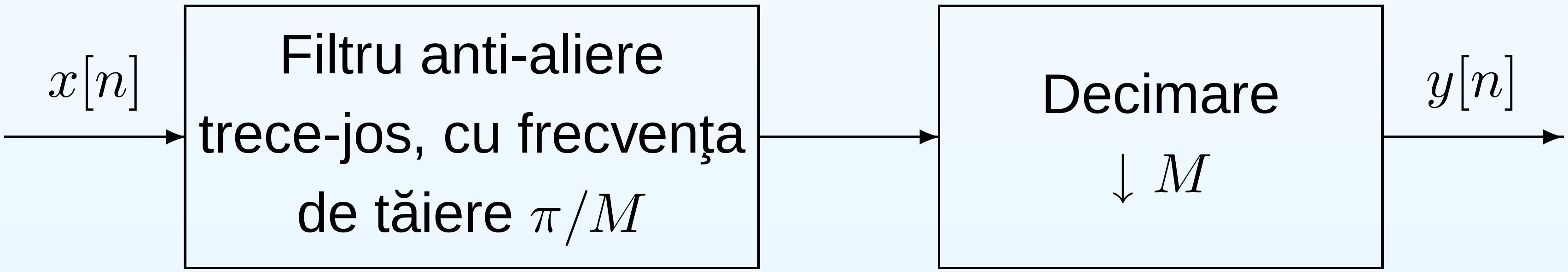
- Dacă spectrul semnalului iniţial se întinde dincolo de frecvenţa π/M, atunci spectrul semnalului decimat nu mai are aceeaşi formă ca spectrul semnalului iniţial
- Spectrul semnalului decimat este suma unor porţiuni (expandate) ale spectrului iniţial
- Apare fenomenul de *aliere*

Aliere—exemplu



Schema practică de decimare

- Pentru a evita alierea (dar afectând spectrul iniţial), se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvenţele superioare lui π/M
- Schema practică de reducere a frecvenţei de eşantionare

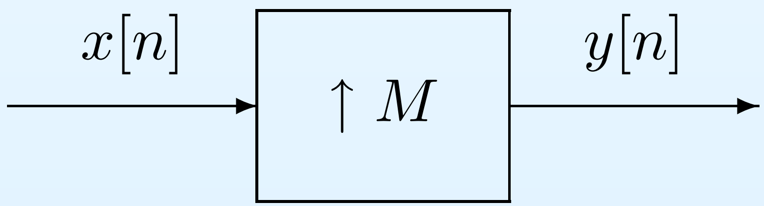


Interpolare (discretă)

- Studiem cazul $T/T_1 = M \in \mathbb{N}$, când frecvenţa de eşantionare creşte de M ori
- Între fiecare două eşantioane ale semnalului $x[n]$ apar $M - 1$ eşantioane noi
- *Interpolatorul* (discret) este sistemul care atribuie valoarea zero eşantioanelor noi, deci funcţionează după regula

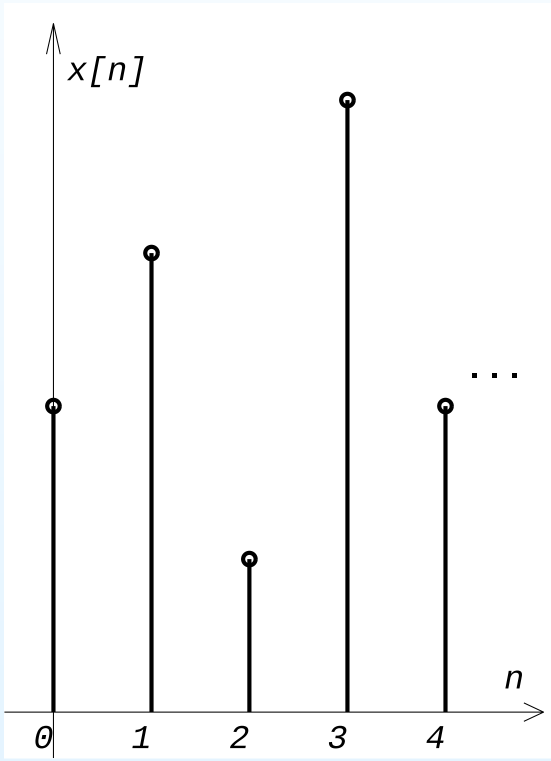
$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & \text{dacă } \; n \bmod M = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

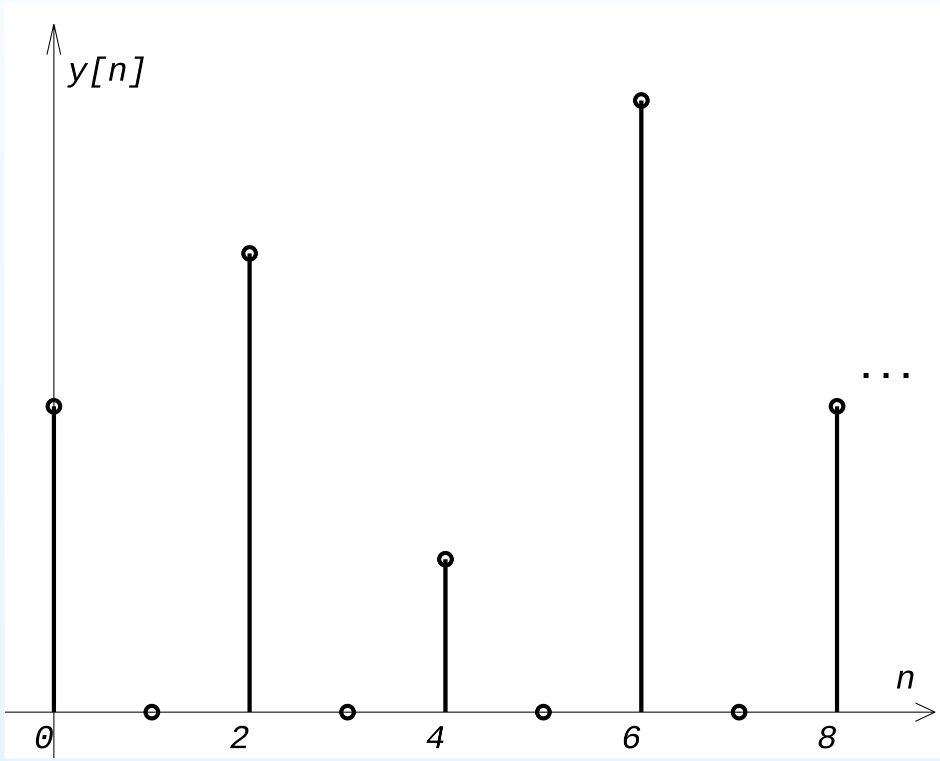
- Notaţie uzuală



Funcţionarea în timp a interpolatorului

- Un interpolator cu factorul $M = 2$ introduce câte un eşantion nul între fiecare două eşantioane ale semnalului de intrare





Transformarea spectrului la interpolare

- Fie $x[n]$ un semnal discret cu energie finită şi $y[n]$ semnalul discret obţinut prin interpolare cu factorul M
- Între spectrele celor două semnale are loc relaţia

$$Y(\omega) = X(M\omega)$$

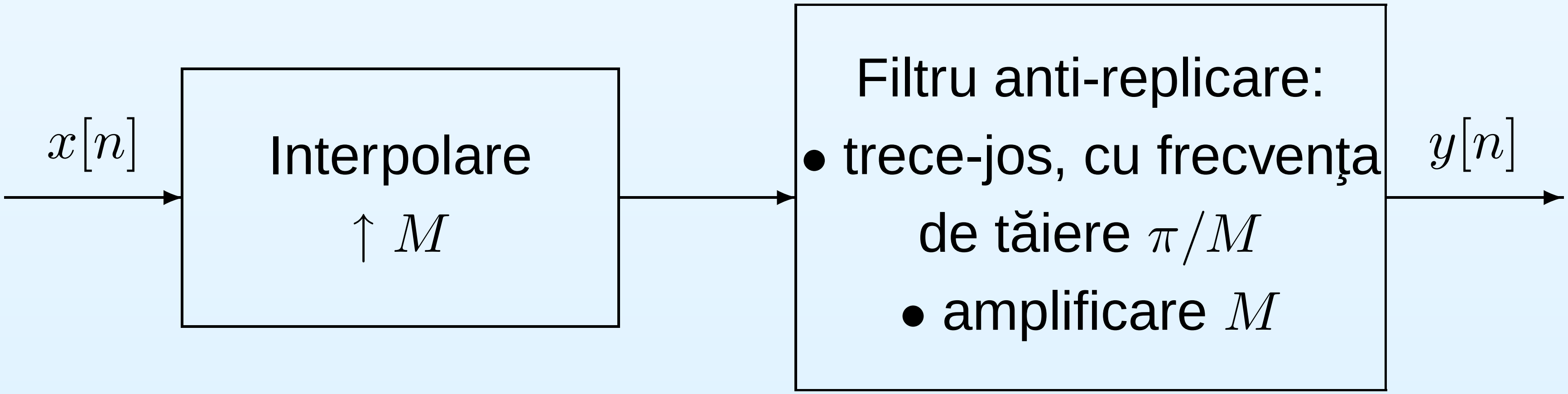
- Demonstraţie:

$$Y(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega Mk} = X(M\omega)$$

- Pe intervalul $[-\pi, \pi]$, spectrul semnalului interpolat este obţinut prin alăturarea a M copii (fiecare comprimată de M ori) ale unei perioade a spectrului semnalului iniţial
- Fenomenul este numit replicare (engl. replication, imaging)

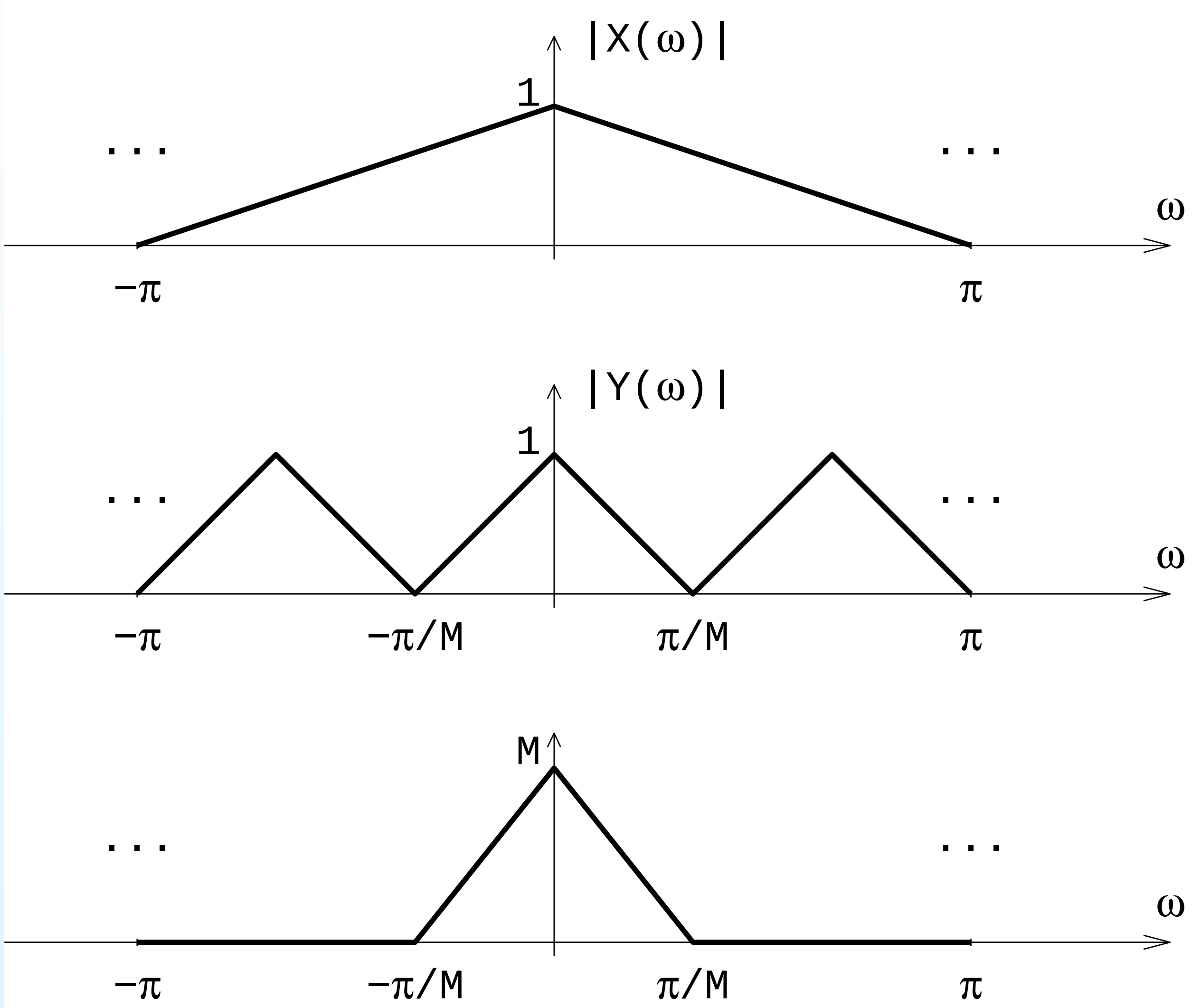
Schema practică de interpolare

- Pentru a păstra forma spectrului iniţial, se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvenţele superioare lui π/M (elimină replicile identice cu cea din banda de bază $[-\pi/M, \pi/M]$)
- Deoarece filtrarea elimină cele $M-1$ replici ale spectrului din afara benzii de bază, filtrul trebuie să aibă o amplificare egală cu M, pentru a conserva energia semnalului
- Denumire: filtru *anti-replicare* sau *de interpolare*
- Schema practică de creştere a frecvenţei de eşantionare cu factorul M este



Transformarea spectrului la interpolare—exemplu

- Pentru $M = 3$:



Filtru Nyquist

- Pentru interpolare se folosesc în special filtre Nyquist:

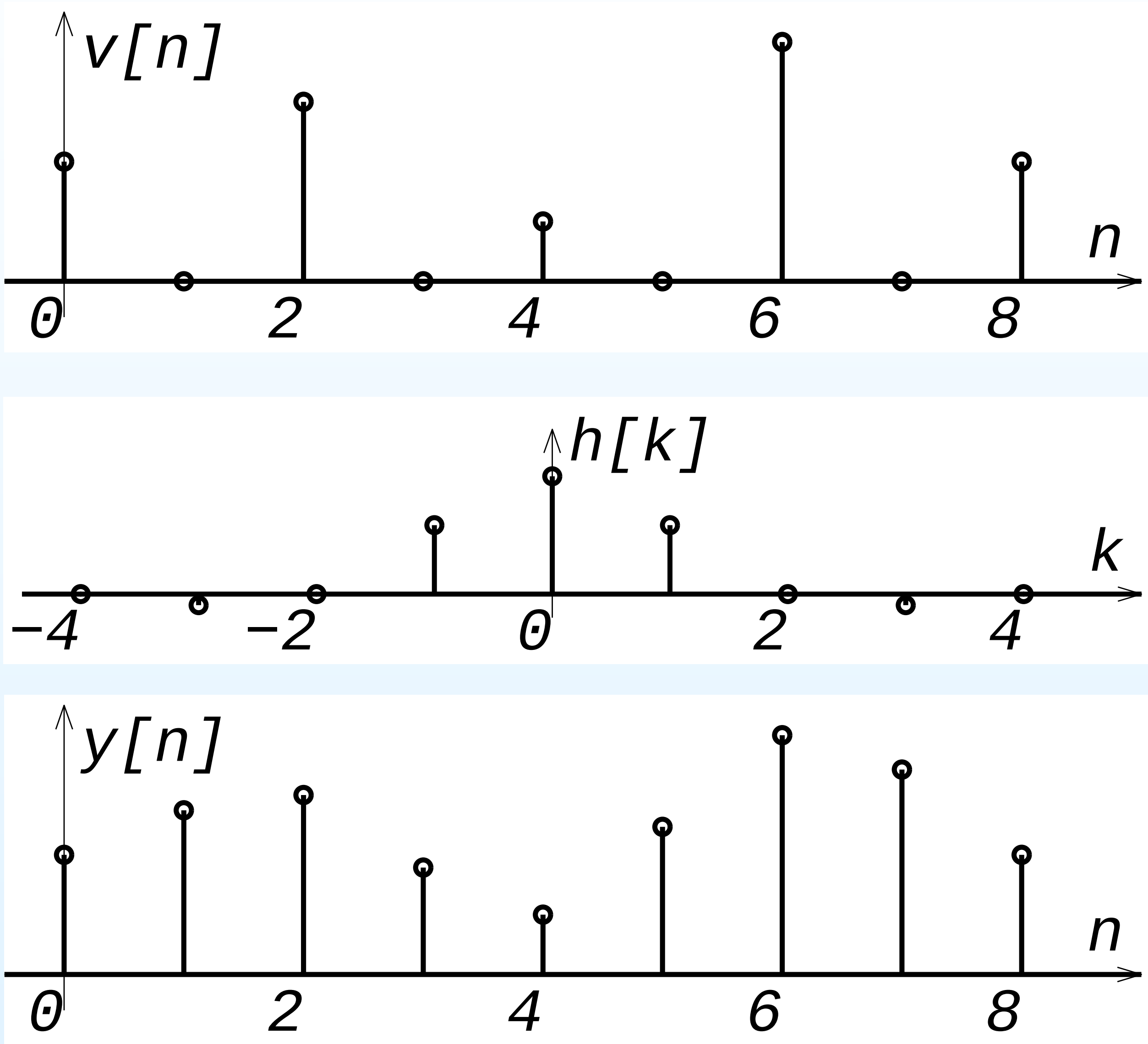
$$H(z) = \sum_{k=-K}^{K} h[k]z^{-k}, \quad h[Mk] = \delta[k]$$

- Notăm $v = x \uparrow M$ semnalul de la intrarea filtrului
- Ieşirea filtrului este

$$y[n] = \sum_{k=n-K}^{n+K} v[k]h[n-k]$$

- Se observă că $y[nM] = v[nM] = x[n]$
- Eşantioanele semnalului iniţial $x[n]$ se regăsesc printre cele ale semnalului reeşantionat

Funcţionarea unui interpolator cu filtru Nyquist



Schimbarea frecvenţei cu un factor raţional

- Cazul general: $T_1/T = M/N$, cu $M, N \in \mathbb{N}$
- Frecvenţa de eşantionare creşte de N/M ori (mai precis, creşte atunci când $N > M$ şi scade când $N < M$)
- Reeşantionarea se realizează prin interpolarea semnalului iniţial $x[n]$ cu factorul N, urmată de decimarea cu factorul M a semnalului interpolat
- Schema practică de reeşantionare: