Prelucrarea semnalelor

Capitolul 4: Proiectarea filtrelor

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Cuprins

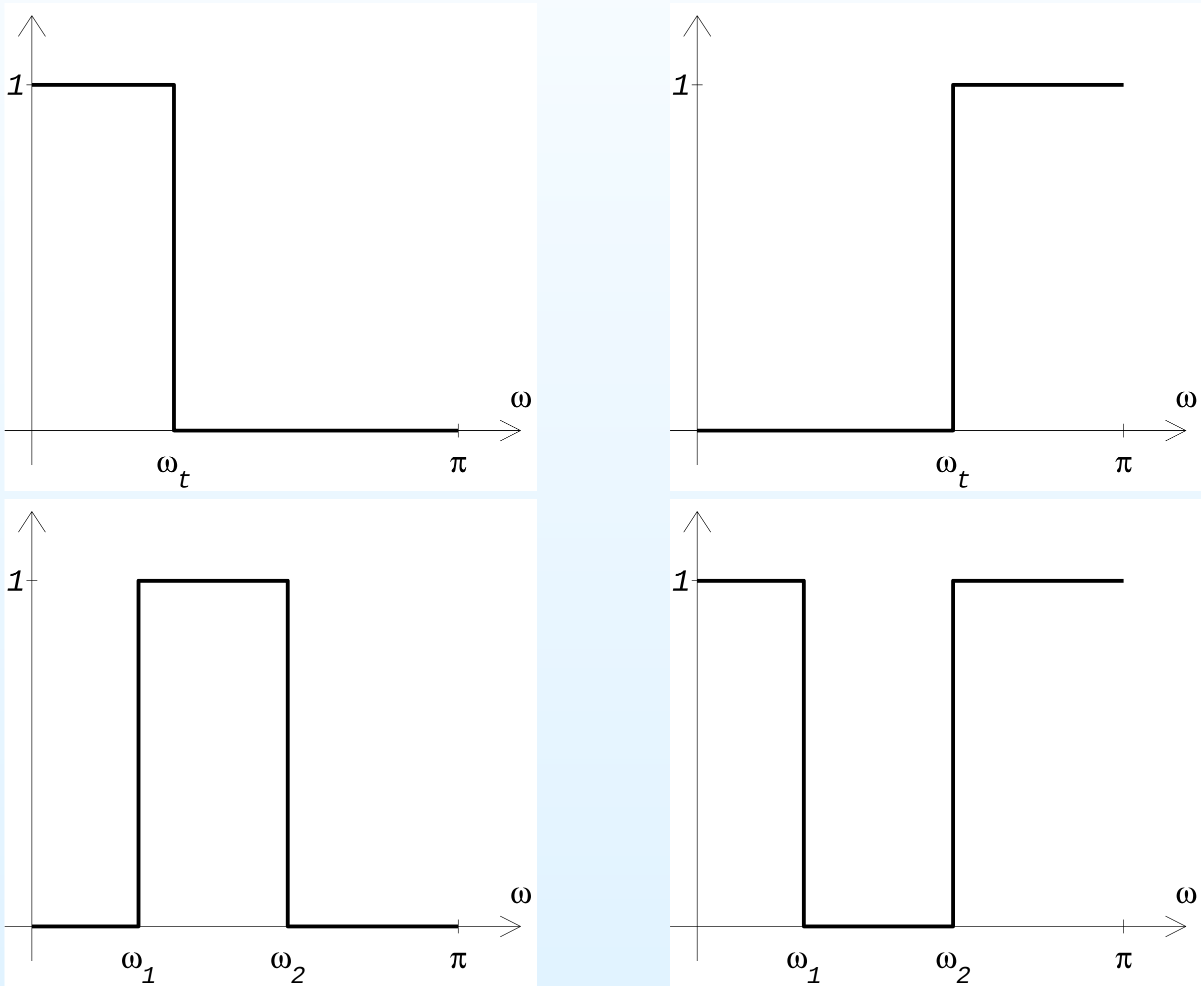
- Descrierea problemei de proiectare
- Metoda ferestrei
- Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP
- Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev (minimax)
- Proiectarea filtrelor IIR, metode de transformare

Obiective generale ale proiectării

- Scopul tipic al unui filtru digital este transformarea în *frecvenţă* a semnalului de intrare
- Un interval de frecvenţe $[\omega_1, \omega_2]$ se numeşte *bandă de trecere* dacă semnalele sinusoidale cu aceste frecvenţe sunt aproape nealterate de filtru ($|H(e^{j\omega})| \approx 1$, $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$)
- *Bandă de oprire (de tăiere, de stop)*: semnalele cu frecvenţele respective sunt tăiate sau mult atenuate de filtru ($|H(e^{j\omega})| \approx 0$, $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$)
- Faza filtrului poate fi sau nu considerată în proiectare; de obicei, se preferă filtrele cu fază liniară

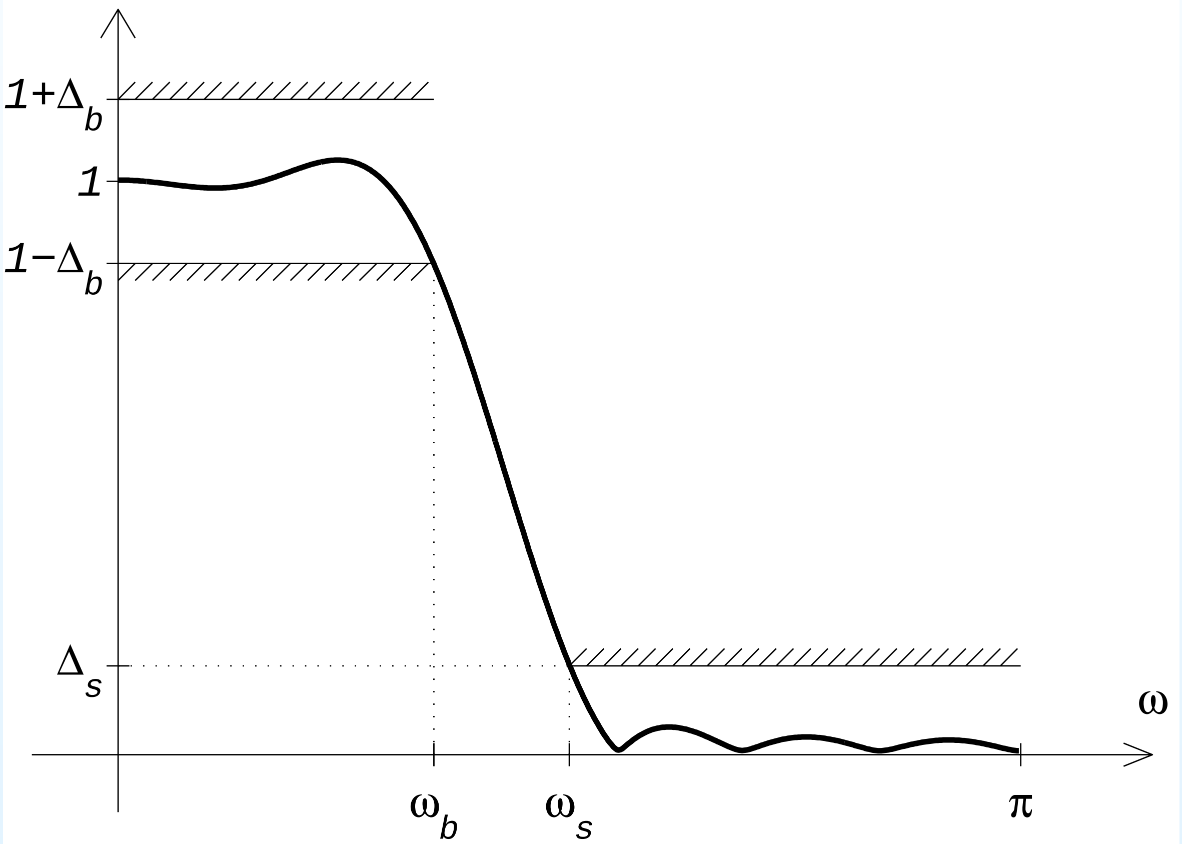
Filtre ideale

- Filtrele ideale sunt necauzale şi au suport infinit
- Tipuri: trece-jos, trece-sus, trece-bandă, opreşte-bandă



Răspuns cu toleranţe fixate (1)

- Se impun erori maxime în benzile de trecere şi oprire



Răspuns cu toleranţe fixate (2)

- Datele de proiectare sunt (pentru filtru trece-jos):
  - Frecvenţele ω_b, ω_s care definesc benzile de trecere şi de oprire; există şi o bandă de tranziţie (ω_b, ω_s), în care valoarea răspunsului este indiferentă
  - Toleranţele Δ_b în banda de trecere $[0, \omega_b]$ şi Δ_s în banda de oprire $[\omega_s, \pi]$
- Ordinul filtrului poate fi precizat de la început sau se poate încerca găsirea unei soluţii de ordin cât mai mic
- Dacă ordinul e fixat, este posibil să nu existe soluţie
- Dispunând de o metodă de proiectare pentru ordin fixat (cazul tipic), ordinul minim se găseşte prin încercări succesive (bisecţie !)

Proiectare prin optimizare

- Se fixează ca obiectiv o caracteristică de frecvenţă, numită *răspuns dorit*
- Pentru un filtru trece-jos răspunsul dorit poate fi

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b] \\ 0, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases}$$

- Căutăm soluţia într-o clasă de filtre de ordin M, notată $\mathcal{C}(M)$ (de exemplu, filtre FIR cu fază liniară, cu coeficienţi simetrici, deci de tip I sau II)
- Scop: găsirea filtrului al cărui răspuns în frecvenţă $H(\omega)$ este cel mai apropiat de $D(\omega)$, pe mulţimea de frecvenţe $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$

Problema de optimizare în sens minimax (Chebyshev)

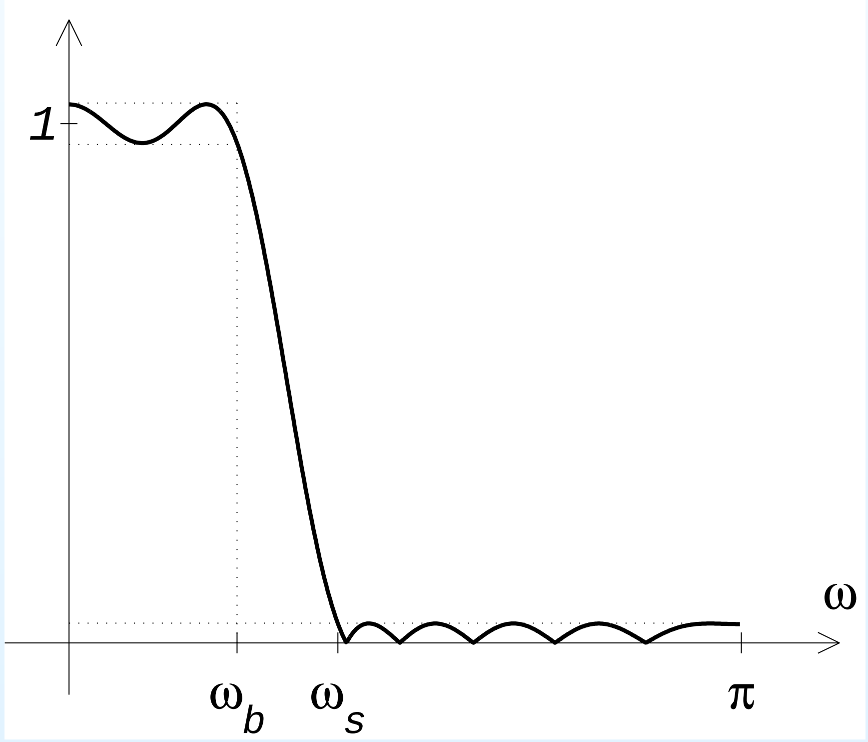
- **F_OPTINF.** Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$ pe o mulţime de frecvenţe $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$ şi o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se găsească filtrul $H(z)$ din clasa $\mathcal{C}(M)$ al cărui răspuns în frecvenţă $H(\omega)$ este cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma infinit, i.e.

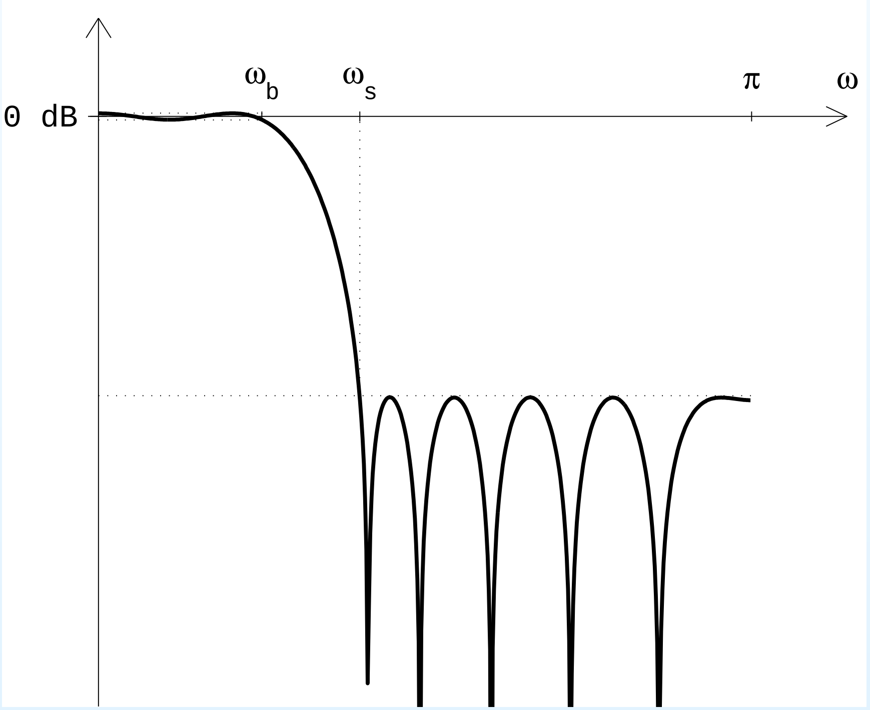
$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \max_{\omega \in \mathcal{F}} |D(\omega) - |H(\omega)||$$

- Se minimizează eroarea maximă faţă de răspunsul dorit

Răspuns specific al unei soluţii minimax

- Eroarea $|D(\omega) - |H(\omega)||$ maximă este atinsă pentru mai multe frecvenţe
- Ondulaţiile răspunsului au înălţimi egale în benzile de trecere şi de oprire (filtru "equiripple")





Problema de optimizare în sens CMMP

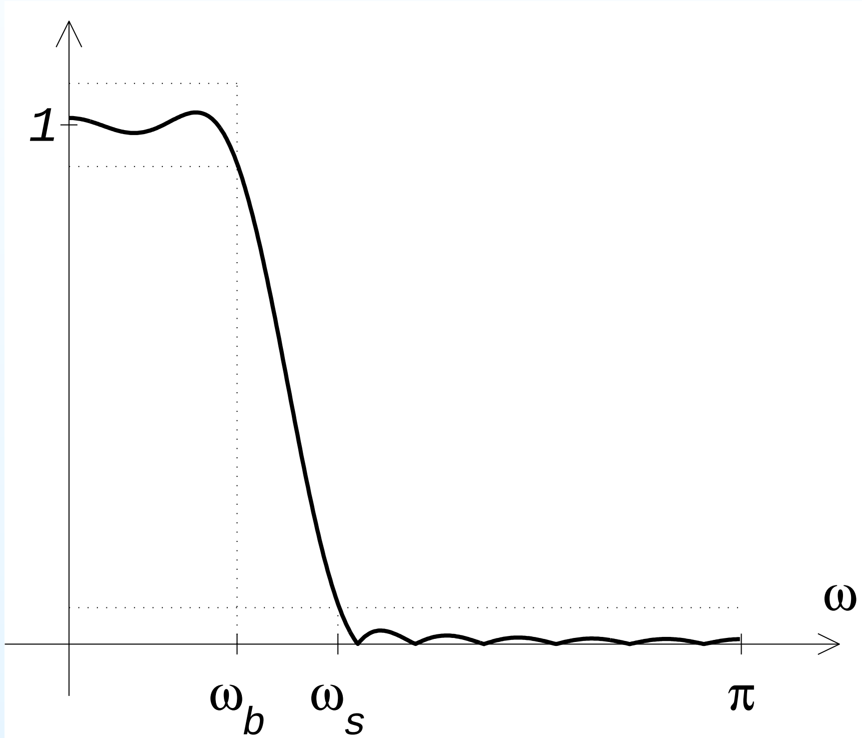
- **F_OPT2.** Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$ pe o mulţime de frecvenţe $\mathcal{F} \subset [0, \pi]$ şi o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se găsească filtrul $H(z)$ din clasa $\mathcal{C}(M)$ al cărui răspuns în frecvenţă $H(\omega)$ este cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma 2, i.e.

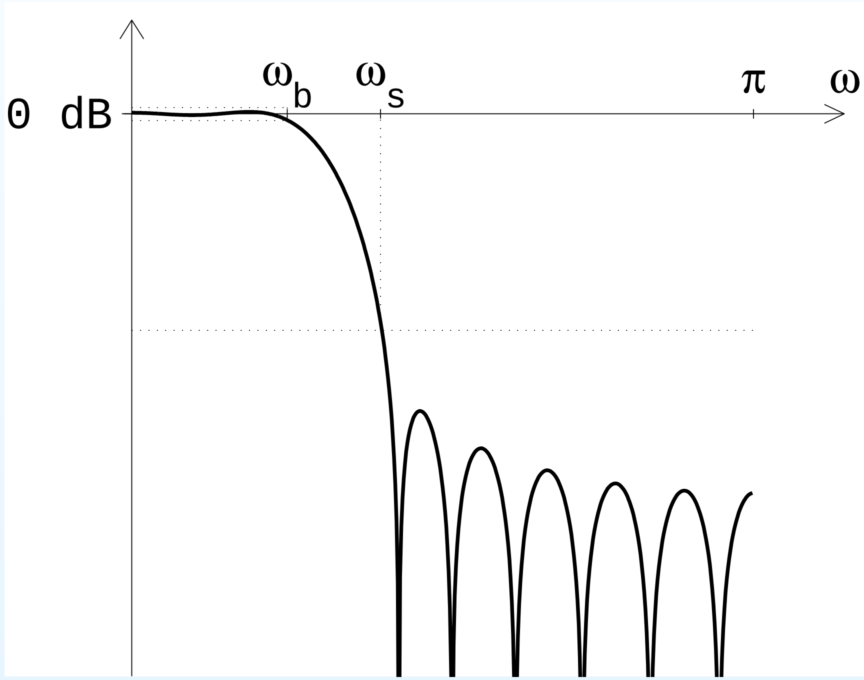
$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega$$

- Se minimizează energia erorii faţă de răspunsul dorit

Răspuns specific al unei soluţii CMMP

- Ondulaţiile sunt mai mari în apropierea benzii de tranziţie





Alte moduri de formulare a optimizării

- Pentru a avea erori mai mici în anumite zone (de exemplu în banda de oprire), se poate introduce o *pondere* $p(\omega) > 0$, astfel încât problema de optimizare să fie

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} p(\omega)[D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega$$

- În problemele **F_OPT2** şi **F_OPTINF** se optimizează doar amplitudinea răspunsului în frecvenţă al filtrului $H(z)$. Pentru a optimiza întregul răspuns, se alege un răspuns dorit $D_c(\omega)$ complex:

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega$$

- Utilizare tipică: filtre IIR cu fază cvasi-liniară

Optimizare pe o mulţime discretă de frecvenţe

- Pentru simplificarea calculelor, problemele **F_OPT2** şi **F_OPTINF** pot fi tratate aproximativ
- Mulţimea continuă de frecvenţe $\mathcal{F}$ se înlocuieşte cu o grilă discretă de frecvenţe $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{F}$ având L puncte (în practică, de ordinul sutelor). De obicei frecvenţele $\omega_k \in \mathcal{G}_L$ se aleg echidistante.
- **F_OPT2D.** Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$, mulţimea de frecvenţe discrete $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \ldots, \omega_L\}$ şi o clasă de filtre $\mathcal{C}(M)$, să se rezolve

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L} [D(\omega_k) - |H(\omega_k)|]^2$$

Proiectarea filtrelor FIR cu metoda ferestrei

- Metodă foarte simplă, fără optimizare
- Idee: modularea în timp a unui răspuns ideal (cu suport infinit) cu un semnal de tip "fereastră", care are suport finit
- Se proiectează un filtru FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

- *Date de proiectare:*
  - ordinul M al filtrului
  - amplitudinea răspunsului ideal în frecvenţă care trebuie aproximat; de exemplu, pentru un filtru trece-jos, se precizează frecvenţa ω_t care delimitează benzile de trecere şi de oprire

Metoda ferestrei

1. Se ia întârzierea de grup $n_0 = M/2$ şi se calculează răspunsul la impuls al filtrului ideal. De exemplu, pentru un filtru trece-jos, răspunsul ideal în frecvenţă este

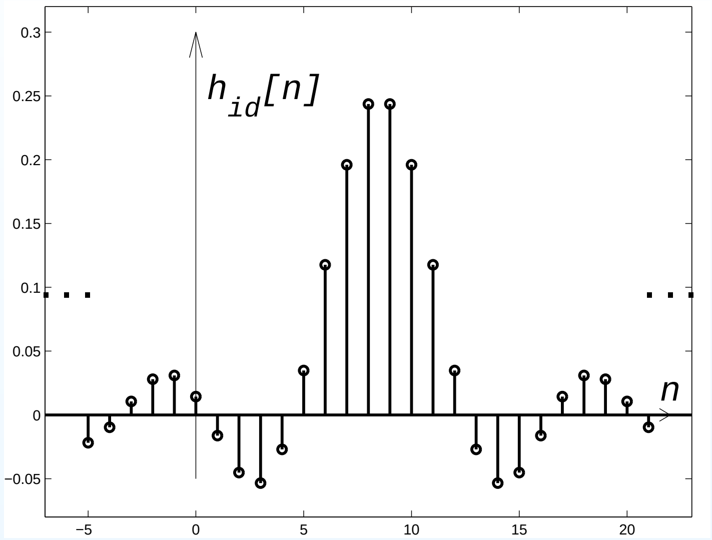
$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

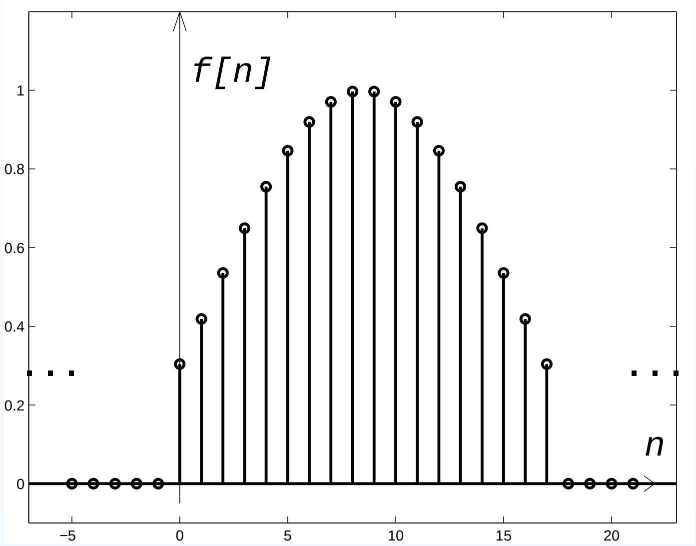
   iar răspunsul la impuls este $h_{id}[n] = \dfrac{\sin \omega_t (n - n_0)}{\pi (n - n_0)}$

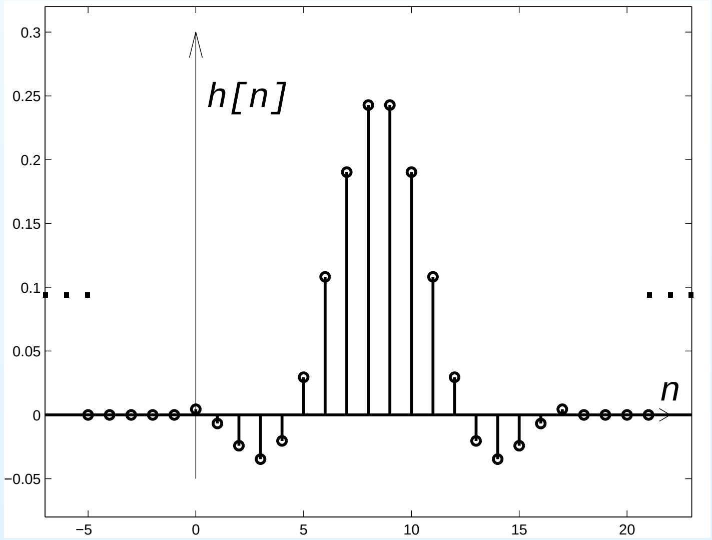
2. Se alege o fereastră $f[n]$ cu suport $0 : M$
3. Se calculează coeficienţii filtrului FIR modulând în timp răspunsul ideal $h_{id}[n]$ cu fereastra $f[n]$, i.e. prin relaţia

$$h[n] = h_{id}[n] \cdot f[n], \; n = 0 : M$$

Exemplu







Rezultate

- După aplicarea algoritmului se trasează răspunsul în frecvenţă al filtrului FIR obţinut şi se verifică dacă este convenabil
- Dacă nu este convenabil, se poate mări ordinul M sau se poate alege o altă fereastră $f[n]$
- Răspunsul în frecvenţă al filtrelor ideale (cu benzi de trecere şi de oprire) are fază liniară
- Dacă coeficienţii ferestrei $f[n]$ sunt simetrici în raport cu mijlocul $M/2$ al suportului $0 : M$, atunci $H(z)$ rezultă un filtru cu fază liniară de tip I sau II
- Un filtru cu fază neliniară ar rezulta dacă s-ar alege o întârziere $n_0 \neq M/2$

Alegerea ferestrei

- Răspunsul în frecvenţă al filtrului $H(z)$ poate fi scris în funcţie de răspunsurile în frecvenţă ale filtrului ideal şi ferestrei

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\theta}) F(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- $H(e^{j\omega}) = H_{id}(e^{j\omega})$ doar dacă $F(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$, adică (evident!) $f[n] = 1$
- Răspunsul în frecvenţă al ferestrei trebuie să fie o aproximaţie cât mai bună a impulsului unitate
- Această cerinţă este contradictorie cu suportul finit !!!

Ferestre uzuale (1)

- *Fereastra dreptunghiulară*

$$f_d[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Trunchierea răspunsului ideal $h_{id}[n]$ dă naştere fenomenului Gibbs, deci $|H(e^{j\omega})|$ are oscilaţii mari în apropierea frecvenţelor de tranziţie
- Ferestrele mai eficiente au valori mai mici la marginea suportului, pentru a preveni fenomenul Gibbs
- *Fereastra triunghiulară (Bartlett)*

$$f_t[n] = \begin{cases} 2n/M, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M, & \text{dacă } M/2 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Ferestre uzuale (2)

- *Fereastra Hanning*:

$$f_{Hann}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi\frac{n+1}{M+2}), & \text{dacă } 0 \le n \le M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- *Fereastra Hamming*:

$$f_{Hamm}[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \le n \le M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- *Fereastra Blackman*:

$$f_B[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(\frac{2\pi n}{M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{M}), & \text{dacă } 0 \le n \le M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Ferestre uzuale (3)

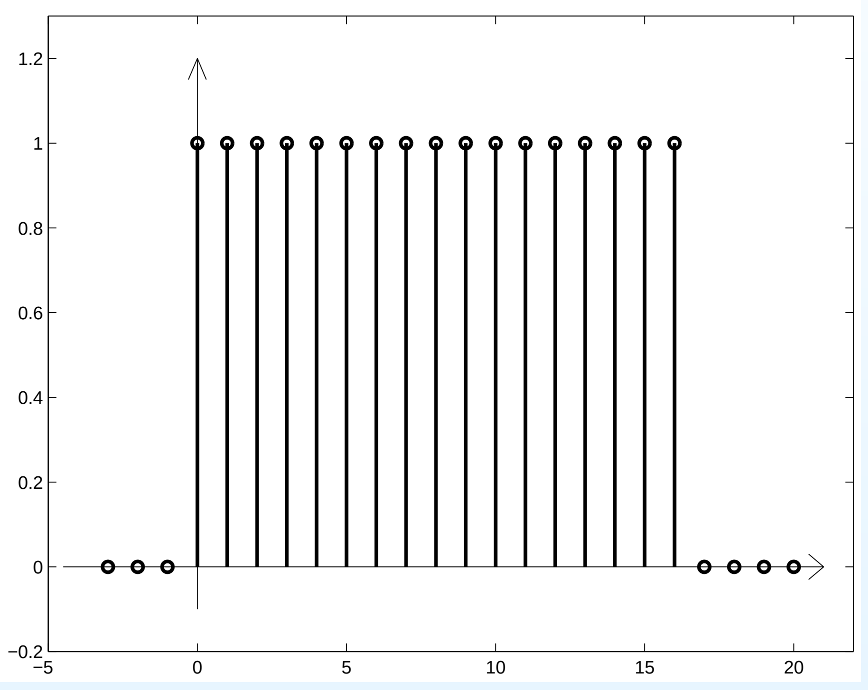
- *Fereastra Kaiser*:

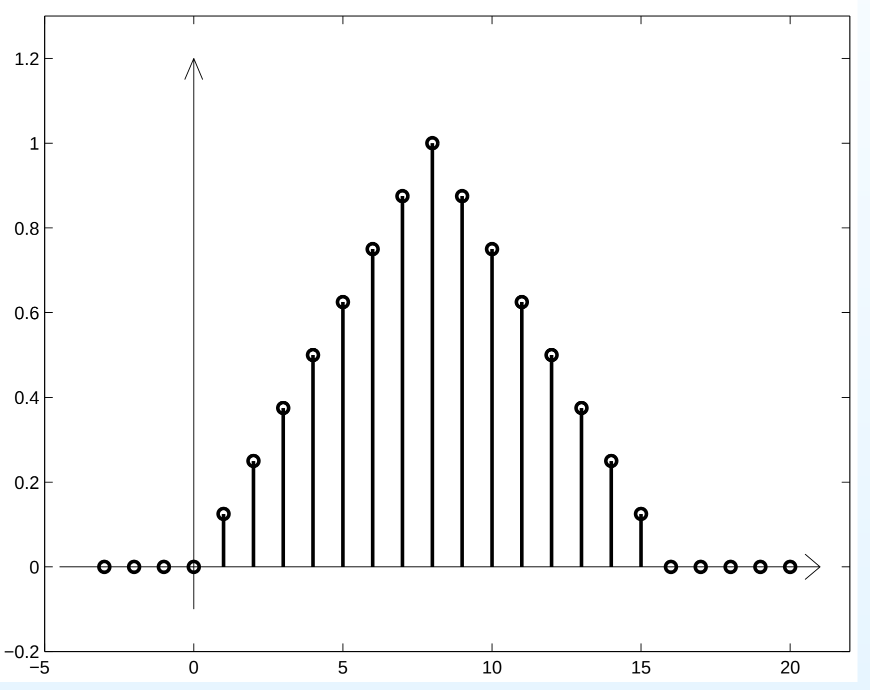
$$f_B[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0(\beta\sqrt{1-[(n-n_0)/n_0]^2})}{I_0(\beta)}, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- $I_0(\cdot)$ este funcţia Bessel de ordinul zero modificată
- Parametrul β permite varierea proprietăţilor ferestrei
- Pentru $\beta = 0$ se obţine fereastra dreptunghiulară
- Cu cât β este mai mare, cu atât răspunsul în frecvenţă al ferestrei are atenuare mai mare, dar tranziţie mai largă

Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (1)

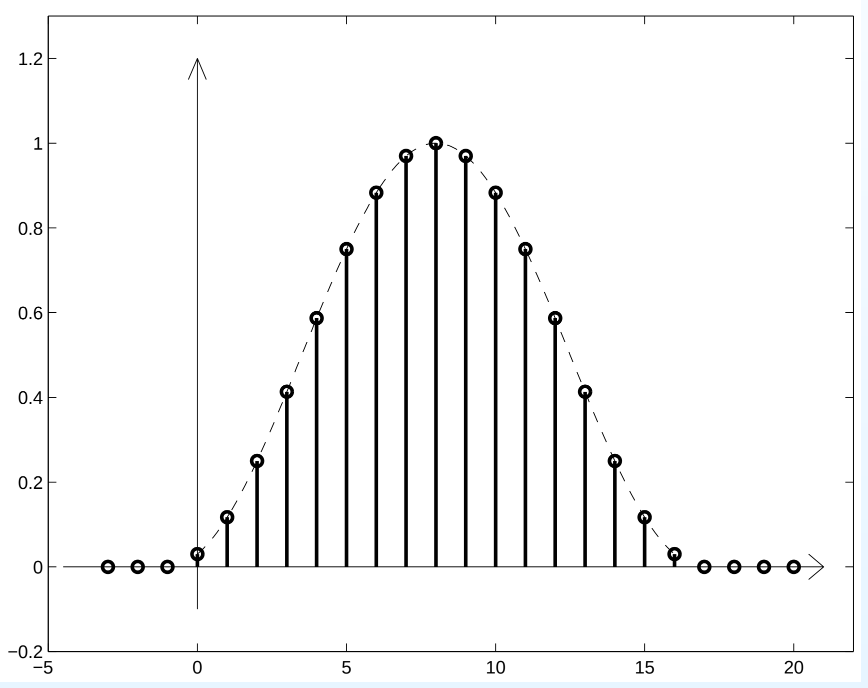
- Ferestre dreptunghiulară (stânga), triunghiulară (dreapta)

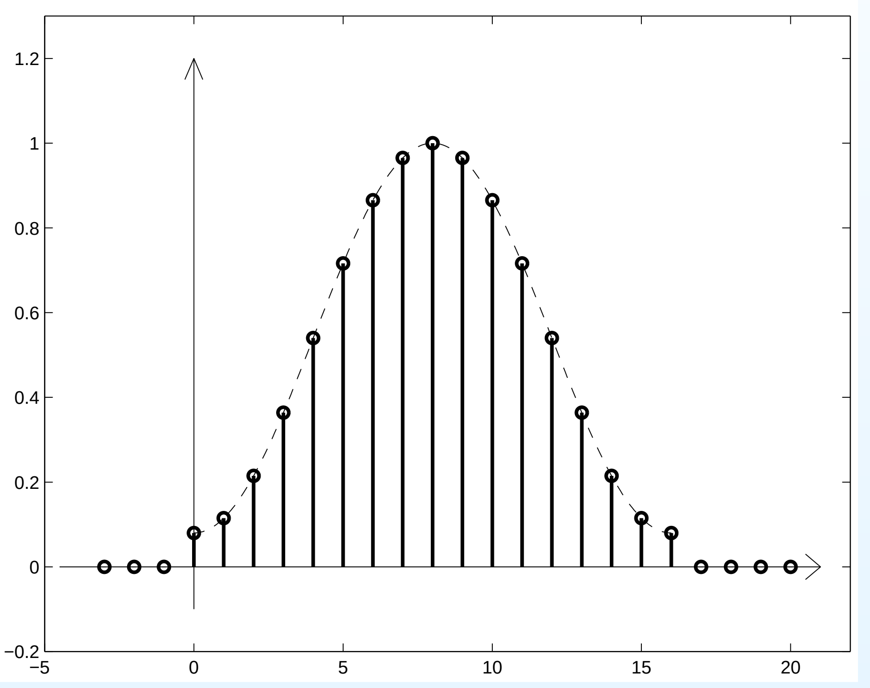




Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (2)

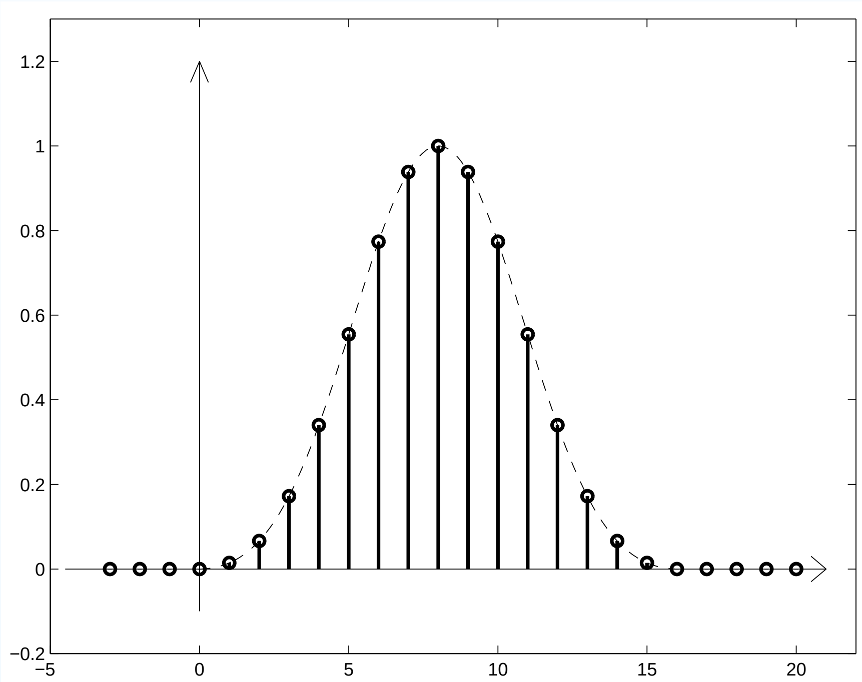
- Ferestre Hanning (stânga), Hamming (dreapta)

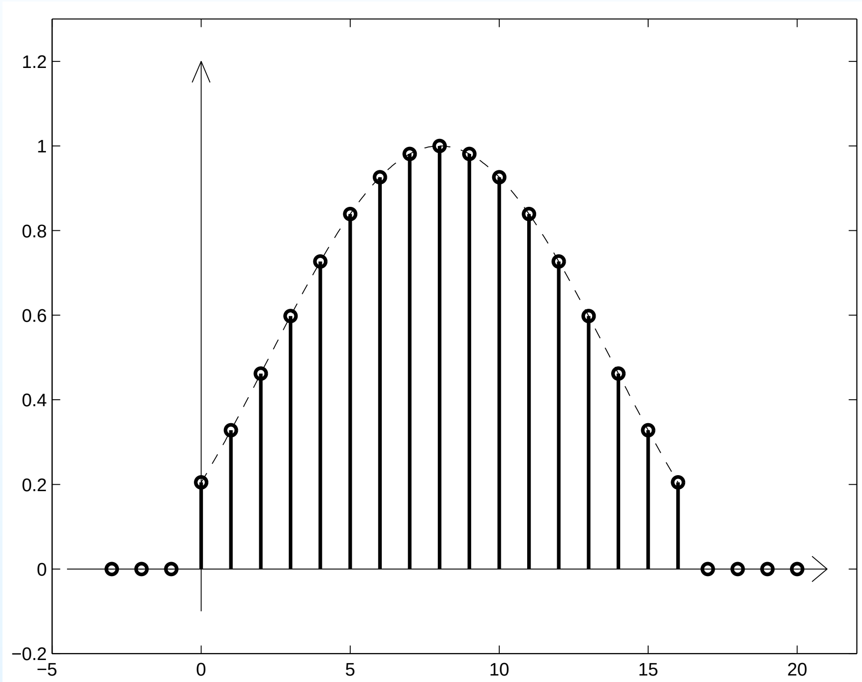




Răspunsuri la impuls ale ferestrelor (3)

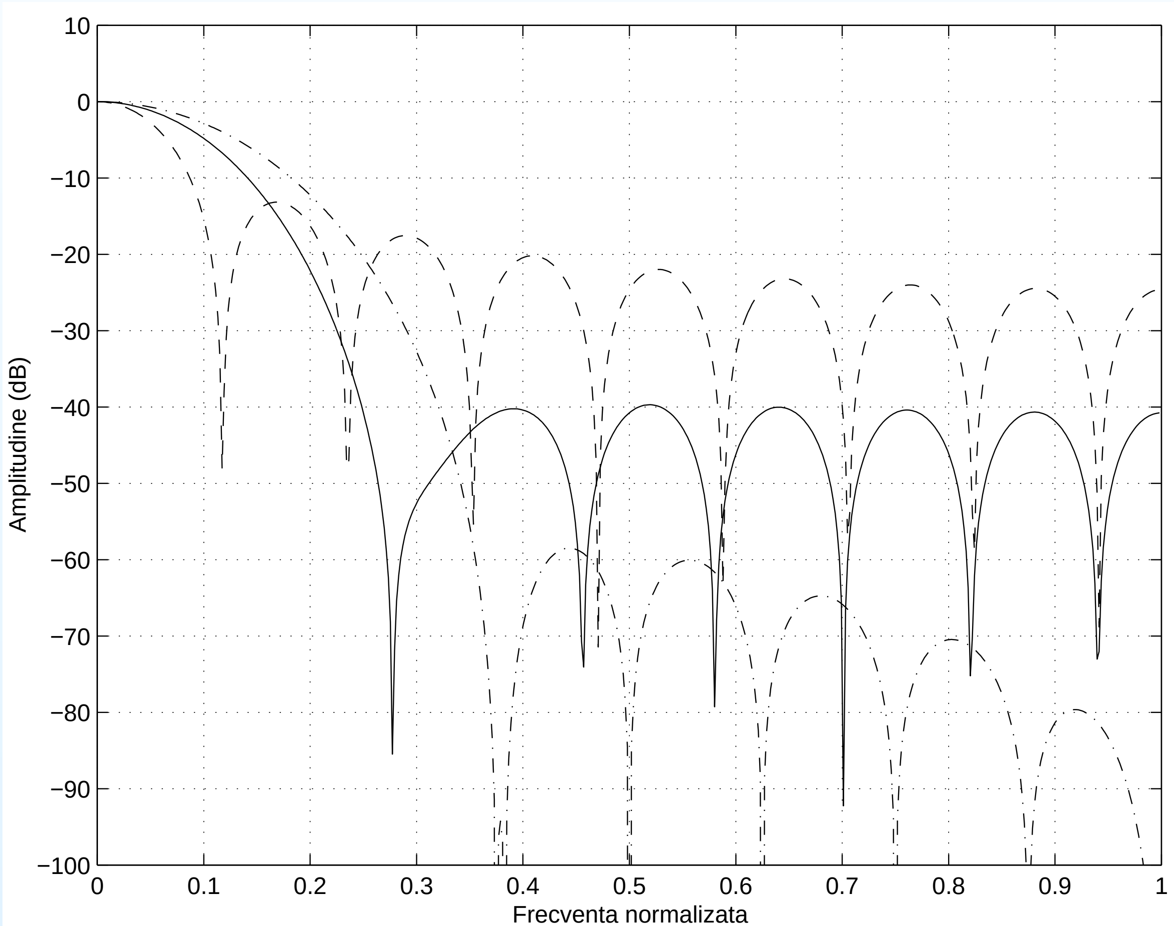
- Ferestre Blackman (stânga), Kaiser cu $\beta = 3$ (dreapta)





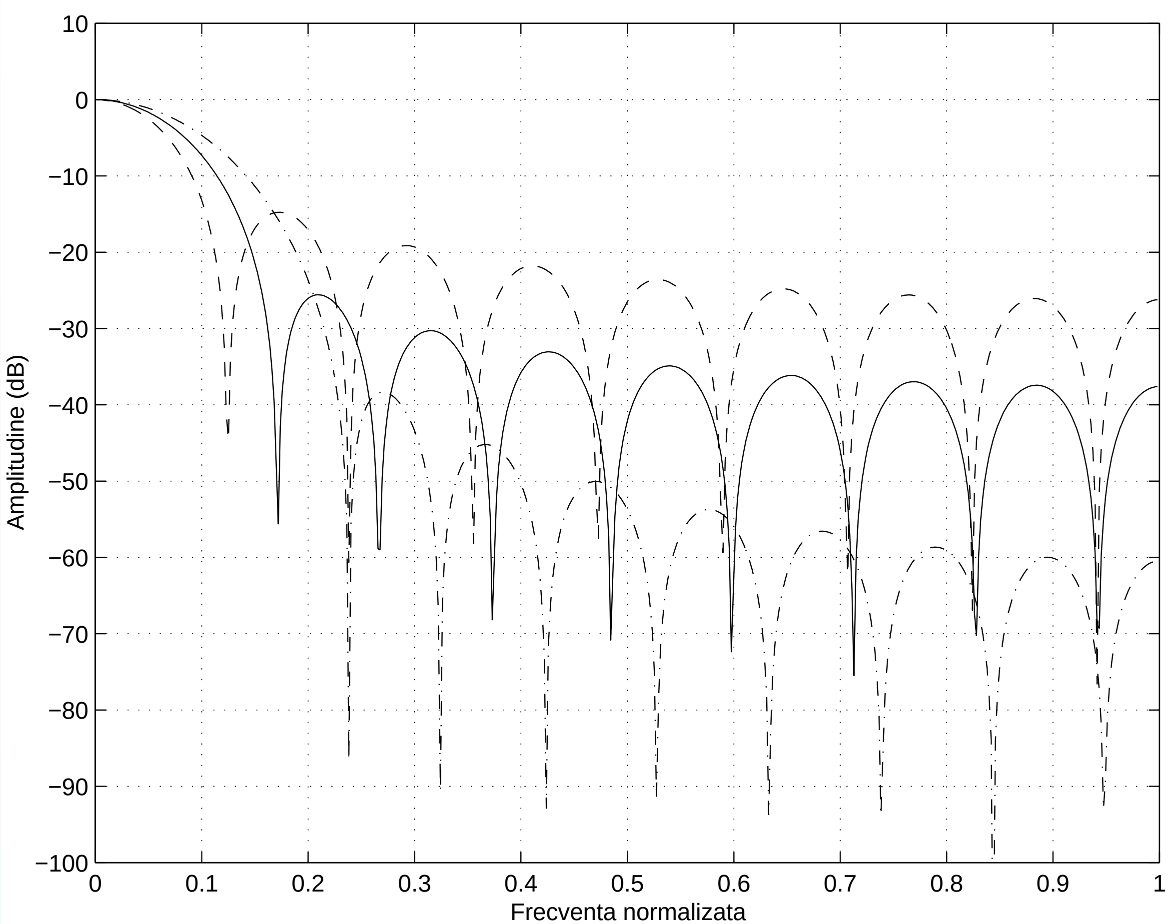
Caracteristici de frecvenţă ale ferestrelor (1)

- Ferestre dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) şi Blackman (linie-punct), pentru $M = 16$



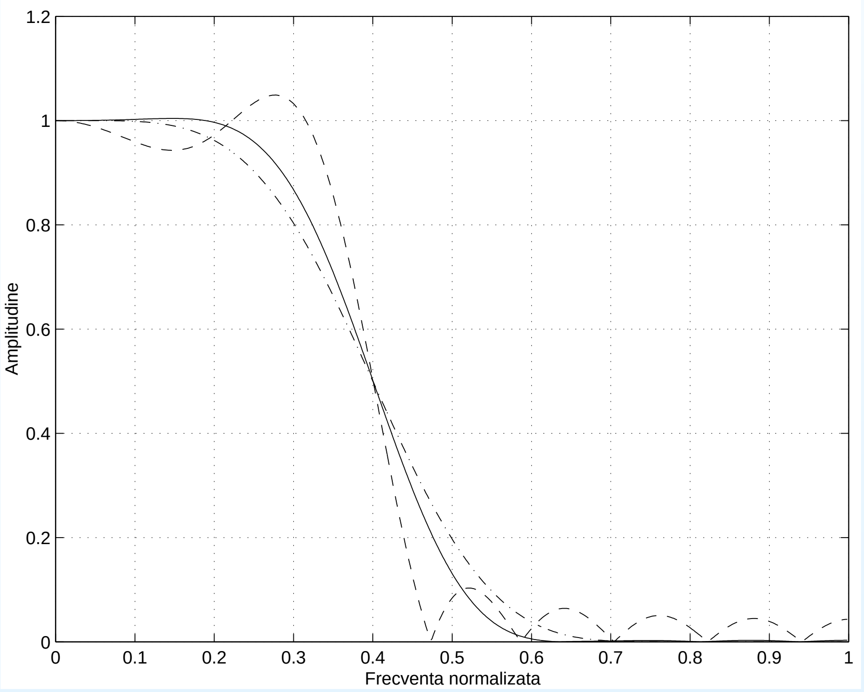
Caracteristici de frecvenţă ale ferestrelor (2)

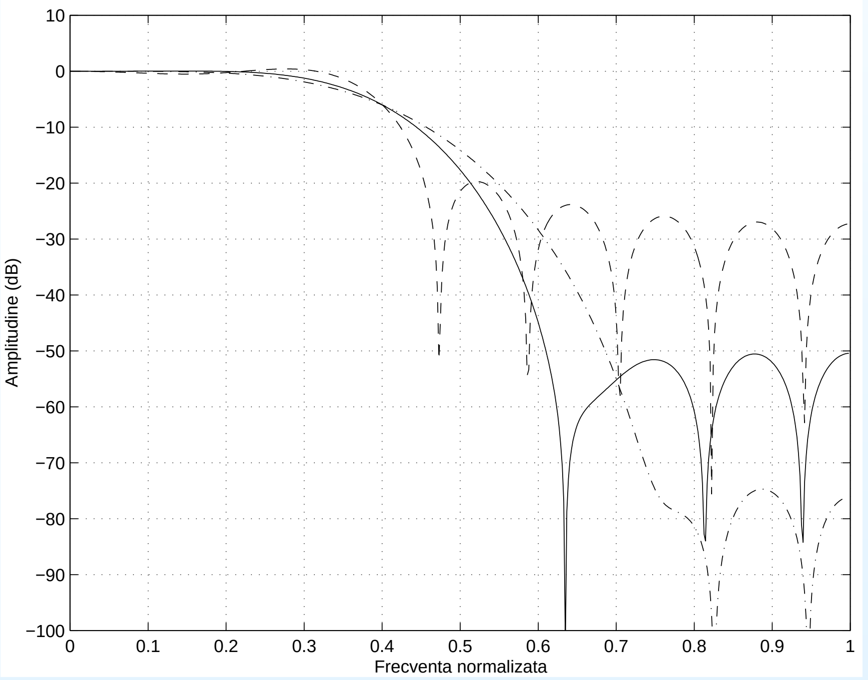
- Ferestre Kaiser cu $\beta = 1$ (linie întreruptă), $\beta = 3$ (linie continuă) şi $\beta = 5$ (linie-punct), pentru $M = 16$



Filtre FIR proiectate cu metoda ferestrei (1)

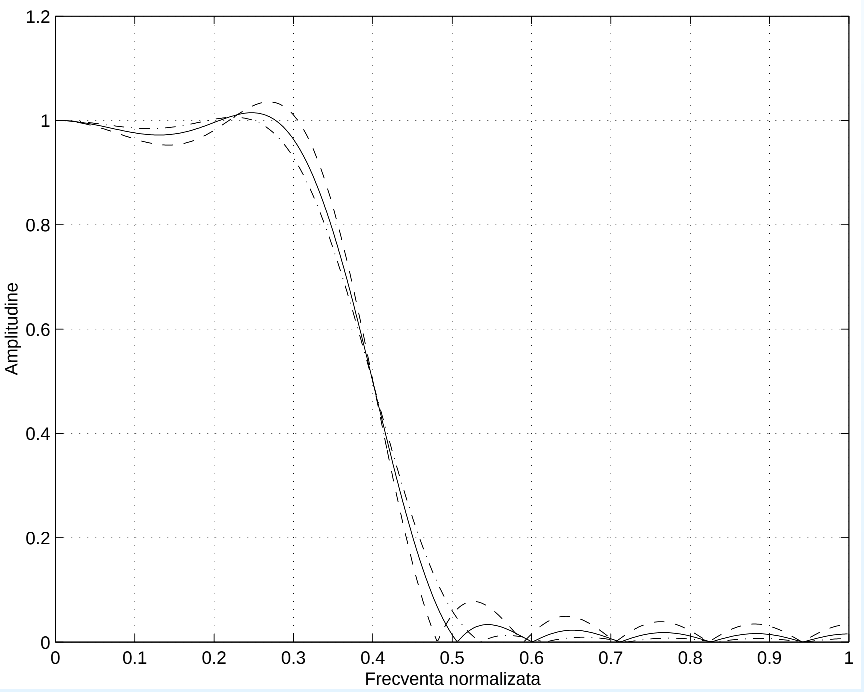
- Ferestre dreptunghiulară (linie întreruptă), Hamming (linie continuă) şi Blackman (linie-punct)

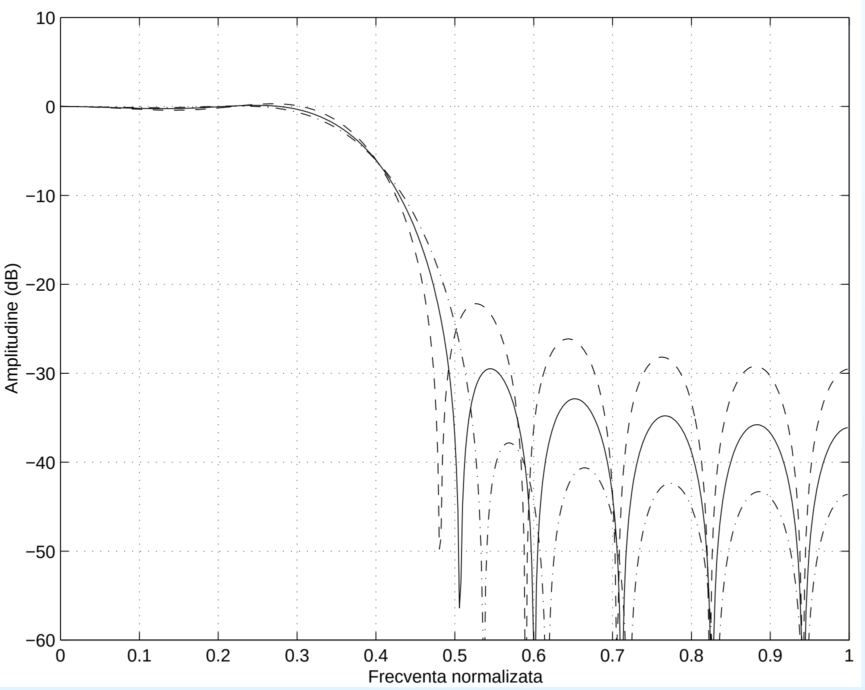




Filtre FIR proiectate cu metoda ferestrei (2)

- Ferestre Kaiser cu $\beta = 1$ (linie întreruptă), $\beta = 2.1$ (linie continuă) şi $\beta = 3$ (linie-punct)





Exemplu de proiectare

- Dorim un filtru trece-jos, cu $\omega_b = 0.3\pi$ şi $\omega_s = 0.5\pi$
- Cu metoda ferestrei, vrem să proiectăm un filtru de ordin $M = 16$, cu erori cât mai mici în benzile de trecere şi oprire
- Luăm $\omega_t = 0.4\pi$ (empiric !) şi încercăm mai multe ferestre

	drept.	Hann.	Hamm.	Black.	Kaiser $\beta = 1$	Kaiser $\beta = 2.1$	Kaiser $\beta = 3$
Δ_b	0.057	0.116	0.130	0.194	0.047	0.0336	0.068
Δ_s	0.103	0.119	0.131	0.197	0.078	0.0336	0.060

- Metoda ferestrei este utilă atunci când specificaţiile sunt vagi iar optimalitatea nu este necesară

Proiectare în sens CMMP: filtre FIR cu fază neliniară

- Răspunsul dorit $D_c(\omega)$ este complex
- Criteriul de optimizare este

$$\min_{H \in \mathcal{C}(M)} \int_{\omega \in \mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2$$

- Nu există nici o restricţie asupra coeficienţilor filtrului (e.g. de tip fază liniară): $\mathcal{C}(M)$ e mulţimea filtrelor FIR de ordin M

Transformarea problemei (1)

- Răspunsul în frecvenţă al filtrului poate fi scris

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} = h^T e(\omega)$$

- Vectorul coeficienţilor filtrului

$$h = [\ h[0]\ h[1]\ \ldots\ h[M]\ ]^T \in \mathbb{R}^{M+1}$$

conţine variabilele problemei de optimizare

- Vectorul

$$e(\omega) = [1\ e^{-j\omega}\ \ \ldots\ \ e^{-j\omega M}]^T \in \mathbb{C}^{M+1}$$

este cunoscut pentru orice frecvenţă ω

Transformarea problemei (2)

- Pătratul erorii poate fi scris în forma

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 &= [h^T e(\omega) - D_c(\omega)][e^H(\omega)h - D_c^*(\omega)] \\ &= h^T e(\omega)e^H(\omega)h - 2Re[e^H(\omega)D_c(\omega)]h + |D_c(\omega)|^2\end{aligned}$$

- Matricea

$$e(\omega)e^H(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & \ldots & e^{j\omega M} \\ e^{-j\omega} & 1 & \ddots & e^{j\omega(M-1)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ e^{-j\omega M} & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix} = C(\omega)+jS(\omega)$$

are structură Toeplitz hermitică

Transformarea problemei (3)

- Partea reală este o matrice Toeplitz simetrică

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \dots & \cos(\omega M) \\ \cos(\omega) & 1 & \ddots & \cos(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cos(\omega M) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Partea imaginară este o matrice Toeplitz antisimetrică

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega) & \dots & \sin(\omega M) \\ -\sin(\omega) & 0 & \ddots & \sin(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\sin(\omega M) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Transformarea problemei (4)

- Deoarece $S(\omega)^T = -S(\omega)$, rezultă $h^T S(\omega) h = 0$
- Notând $g^T(\omega) = Re[e^H(\omega) D_c(\omega)]$ putem scrie

$$|H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 = h^T C(\omega) h - 2 g^T(\omega) h + |D_c(\omega)|^2$$

- Notăm

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega) d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} g(\omega) d\omega$$

- Matricea P este pozitiv definită

Problema de optimizare CMMP

- Criteriul de optimizare în sens CMMP capătă forma

$$\min_{h \in \mathbb{R}^{M+1}} h^T P h - 2q^T h$$

- Vectorul coeficienţilor filtrului optim este

$$\boxed{h = P^{-1} q}$$

- Demonstraţie: pentru a minimiza criteriul $V(h) = h^T P h - 2q^T h$ anulăm gradientul $\frac{\partial V(h)}{\partial h} = 2Ph - 2q$, de unde rezultă $h = P^{-1}q$. Acest h corespunde într-adevăr unui punct de minim deoarece Hessianul $\frac{\partial^2 V(h)}{\partial h^2} = 2P$ este pozitiv definit.

Algoritmul de proiectare

0. *Date de proiectare:* ordinul M al filtrului, răspunsul ideal în frecvenţă $D_c(\omega)$ (cu valori complexe) care trebuie aproximat şi mulţimea de frecvenţe $\mathcal{F}$ pe care se face aproximaţia
1. Se calculează matricea P şi vectorul q

$$P = \int_{\omega \in \mathcal{F}} C(\omega) d\omega, \quad q = \int_{\omega \in \mathcal{F}} g(\omega) d\omega$$

2. Se calculează $h = P^{-1} q$

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (1)

- Datele de proiectare sunt ordinul filtrului M, frecvenţele ω_b şi ω_s, întârzierea de grup n_0 şi răspunsul dorit

$$D_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \le \omega_b \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

- Pentru a construi matricea P, ţinem seama că

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \frac{\sin(n\omega_2)}{n} - \frac{\sin(n\omega_1)}{n} = \omega_2 \text{sinc}(n\omega_2) - \omega_1 \text{sinc}(n\omega_1)$$

- Deoarece $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$, elementul de pe diagonala n a matricei Toeplitz P este

$$p_n = \omega_b \text{sinc}(n\omega_b) - \omega_s \text{sinc}(n\omega_s) + \pi\delta[n]$$

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (2)

- Elementele vectorului q sunt

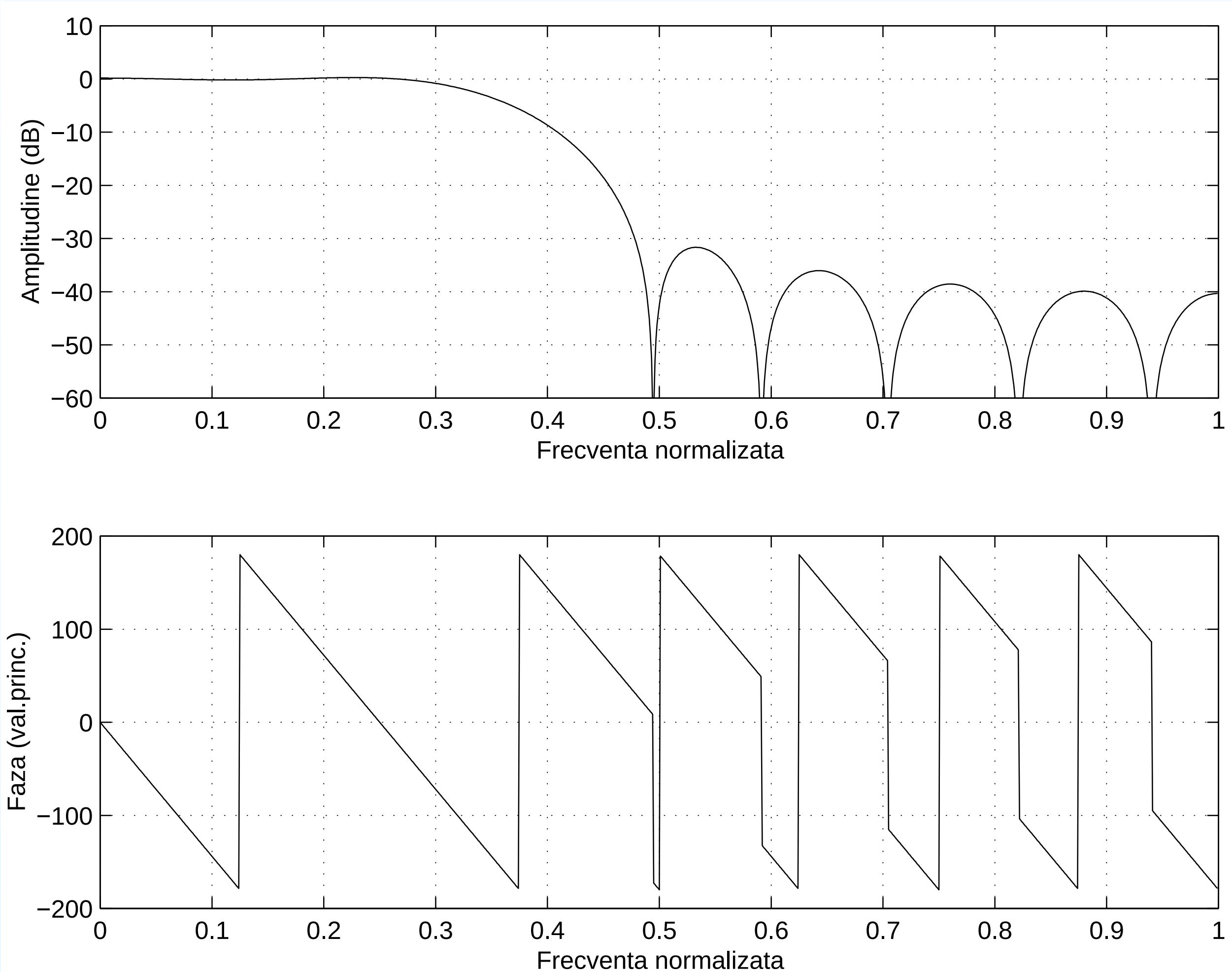
$$
\begin{aligned}
q_n &= \int_{\omega \in \mathcal{F}} Re[e^{jn\omega} D_c(\omega)] d\omega = \int_0^{\omega_b} Re[e^{j(n-n_0)\omega}] d\omega \\
&= \int_0^{\omega_b} \cos(n-n_0)\omega d\omega = \omega_b \text{sinc}(n-n_0)\omega_b
\end{aligned}
$$

- Programul Matlab:

```
T = (0:M)';
p = wb*sinc(T*wb) - ws*sinc(T*ws) + eye(size(T));
P = toeplitz(p);
q = wb*sinc((T-n0)*wb);
h = P \ q;
```

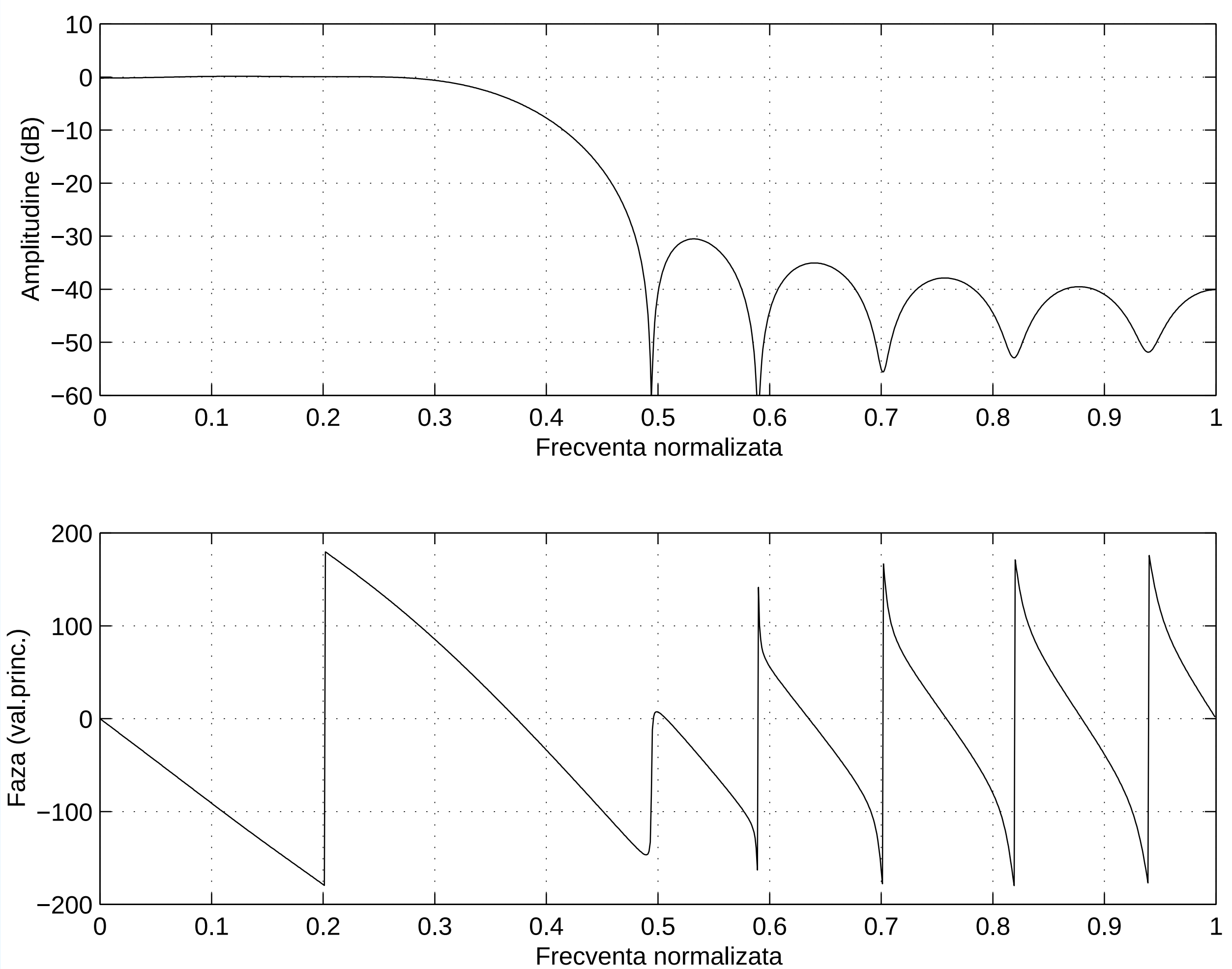
Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (3)

- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $n_0 = 8$
- Pentru $n_0 = M/2$ filtrul optim are fază liniară !



Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos (4)

- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $n_0 = 5$



Alte probleme de proiectare CMMP

- Pentru *filtre FIR cu fază liniară* de ordin M:

$$H(e^{j\omega}) = h^T c(\omega) e^{-j\omega M/2}$$

- De exemplu, pentru filtrele de tip I:

$$h = [\ h[\tfrac{M}{2}]\ \ h[\tfrac{M}{2}-1]\ \ldots\ h[1]\ \ h[0]\ ]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1},$$
$$c(\omega) = [1\ \ 2\cos\omega\ \ \ldots\ \ 2\cos(\omega(\tfrac{M}{2}-1))\ \ 2\cos(\omega\tfrac{M}{2})\ ]^T \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}+1}$$

- Problema de optimizare CMMP se formulează şi se rezolvă asemănător, utilizând doar coeficienţii distincţi ai filtrului

- *Problema* **F_OPT2D**: matricea P şi vectorul q nu sunt calculate prin integrare, ci printr-o sumă finită
- De exemplu $P = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} C(\omega_k)$

Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev

- Ne ocupăm doar de filtre FIR cu fază liniară (pentru care proiectarea este mai simplă)
- Problema: **F_OPTINF**
- Algoritm: Parks-McClellan
- Discutăm doar elementele esenţiale ale metodei
- Considerăm doar filtre de tip I, al căror răspuns în frecvenţă are partea reală ($K = M/2$)

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^{K} g_n \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^{K} f_n (\cos\omega)^n$$

- Algoritmul foloseşte noţiuni de aproximare polinomială

Proprietăţile filtrului optim

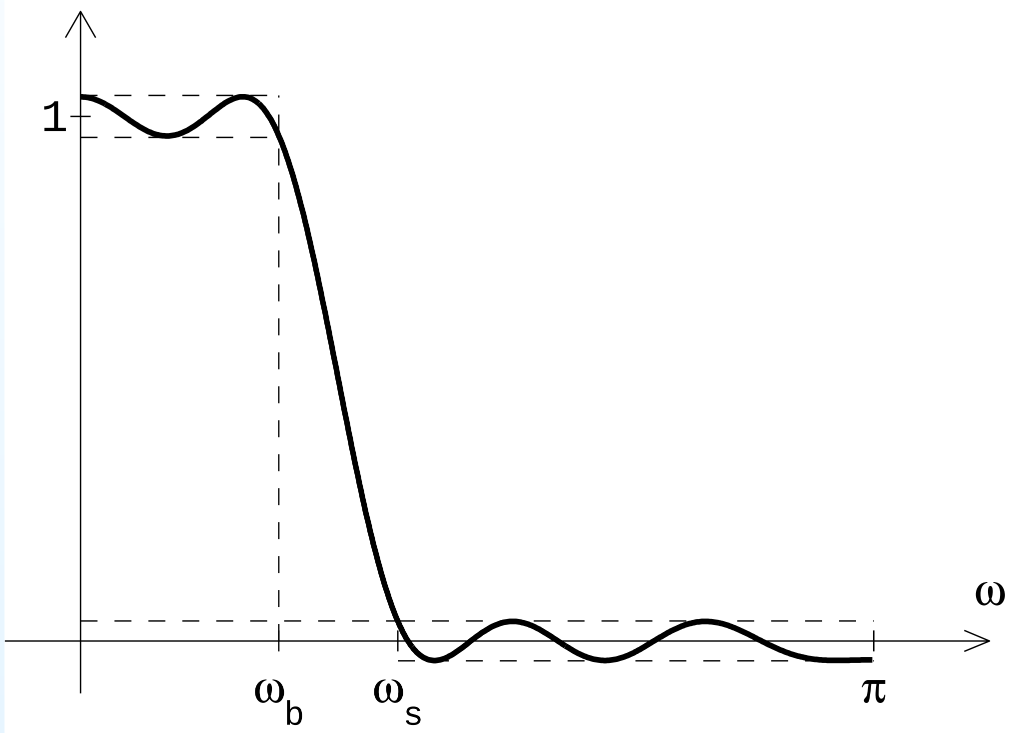
- Eroarea cu care răspunsul filtrului aproximează răspunsul dorit este $E(\omega) = D(\omega) - H_r(\omega)$
- Pentru un filtru optim, funcţia $E(\omega)$ are un număr de extreme locale, toate cu aceeaşi amplitudine Δ
- *Teoremă de alternanţă*: pentru soluţia unei probleme **F_OPTINF**, funcţia eroare $E(\omega)$ are $L \geq K + 2$ extreme locale în frecvenţele $\omega_1, \ldots, \omega_L$, cu aceeaşi amplitudine şi cu semne alternante, i.e.

$$E(\omega_k) = (-1)^k \Delta, \quad k = 1 : L,$$

unde Δ este valoarea maximă a erorii (egală cu norma infinit, sau Chebyshev, a funcţiei $E(\omega)$)

Exemplu de filtru optim

- Pentru $M = 16$, $K = 8$ un exemplu de $H_r(\omega)$ optim este



- Valoarea maximă a erorii este atinsă în $K + 2 = 10$ puncte

Algoritmul Parks-McClellan (Remez)

1. Se aleg $K+2$ frecvenţe $\omega_k \in [0,\pi]$, $k = 1 : K+2$. Se alege o toleranţă ε.
2. Se rezolvă sistemul $E(\omega_k) = (-1)^k \Delta$, $k = 1 : K+2$, necunoscutele fiind coeficienţii $f_0, \ldots, f_K$ şi valoarea Δ.
3. Se calculează punctele de extrem $\omega_k' \in [0,\pi]$, $k = 1 : L$, ale răspunsului $H_r(\omega)$ obţinut, şi se reţin $K+2$ dintre ele, cele pentru care eroarea $|D(\omega_k') - H_r(\omega_k')|$ are valorile cele mai mari.
4. Dacă $|\omega_k - \omega_k'| \le \varepsilon$, $k = 1 : K+2$, atunci soluţia a fost obţinută. Altfel, se pune $\omega_k \leftarrow \omega_k'$, $k = 1 : K+2$, şi se reia de la pasul 2.

Explicaţii

- Algoritmul se bazează pe "forţări" succesive ale relaţiei $E(\omega_k) = (-1)^k \Delta$ care caracterizează filtrul optim
- După ce la pasul 1 se alege un set arbitrar de frecvenţe ω_k, nu se obţine eroarea Δ minimă
- De aceea, punctele de extrem ω_k', calculate la pasul 3, sunt diferite de punctele iniţiale ω_k
- Algoritmul converge !
- Numeroase detalii de implementare: de exemplu, la proiectarea unui filtru trece-jos, frecvenţele ω_b şi ω_s fac parte întotdeauna din setul de frecvenţe ω_k

Rezolvarea problemei **F_OPTINFD**

- Date fiind o mulţime discretă de frecvenţe $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \ldots, \omega_L\}$ şi un răspuns dorit $D_r(\omega)$ *real*, problema de proiectare a unui filtru FIR cu fază liniară

$$\min_h \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|$$

- Vectorul h conţine coeficienţii distincţi ai filtrului, vezi pag. 41
- Problema de optimizare se poate transforma într-o problemă de *programare liniară*
- Aceasta se rezolvă cu algoritmi standard (de exemplu funcţia `lp` din Matlab)

Transformarea problemei (1)

- Introducem variabila suplimentară

$$\Delta = \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - c^T(\omega_k)h|$$

care are semnificaţie de eroare maximă de aproximare pe mulţimea de frecvenţe $\mathcal{G}_L$

- Putem aşadar scrie

$$-\Delta \leq c^T(\omega_k)h - D(\omega_k) \leq \Delta, \quad k = 1 : L,$$

sau

$$D(\omega_k) - \Delta \leq c^T(\omega_k)h \leq D(\omega_k) + \Delta, \quad k = 1 : L$$

Transformarea problemei (2)

- Problema de optimizare capătă forma

$$\begin{aligned} \min_{h,\Delta} \quad & \Delta \\ \text{cu restricţiile} \quad & c^T(\omega_k)h - \Delta \le D(\omega_k), \quad k = 1:L \\ & -c^T(\omega_k)h - \Delta \le -D(\omega_k), \quad k = 1:L \end{aligned}$$

- Vectorul variabilelor problemei de optimizare este

$$\xi = \begin{bmatrix} h \\ \Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M'+1}$$

unde M' este numărul de coeficienţi distincţi ai filtrului

Transformarea problemei (3)

- Notăm

$$\Psi = \begin{bmatrix} c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ c^T(\omega_L) & -1 \\ -c^T(\omega_1) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -c^T(\omega_L) & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L\times(M'+1)}, \quad \beta = \begin{bmatrix} D(\omega_1) \\ \vdots \\ D(\omega_L) \\ -D(\omega_1) \\ \vdots \\ -D(\omega_L) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L}$$

$$\gamma = [0 \ \ldots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{M'+1}$$

Programul liniar pentru rezolvarea **F_OPTINFD**

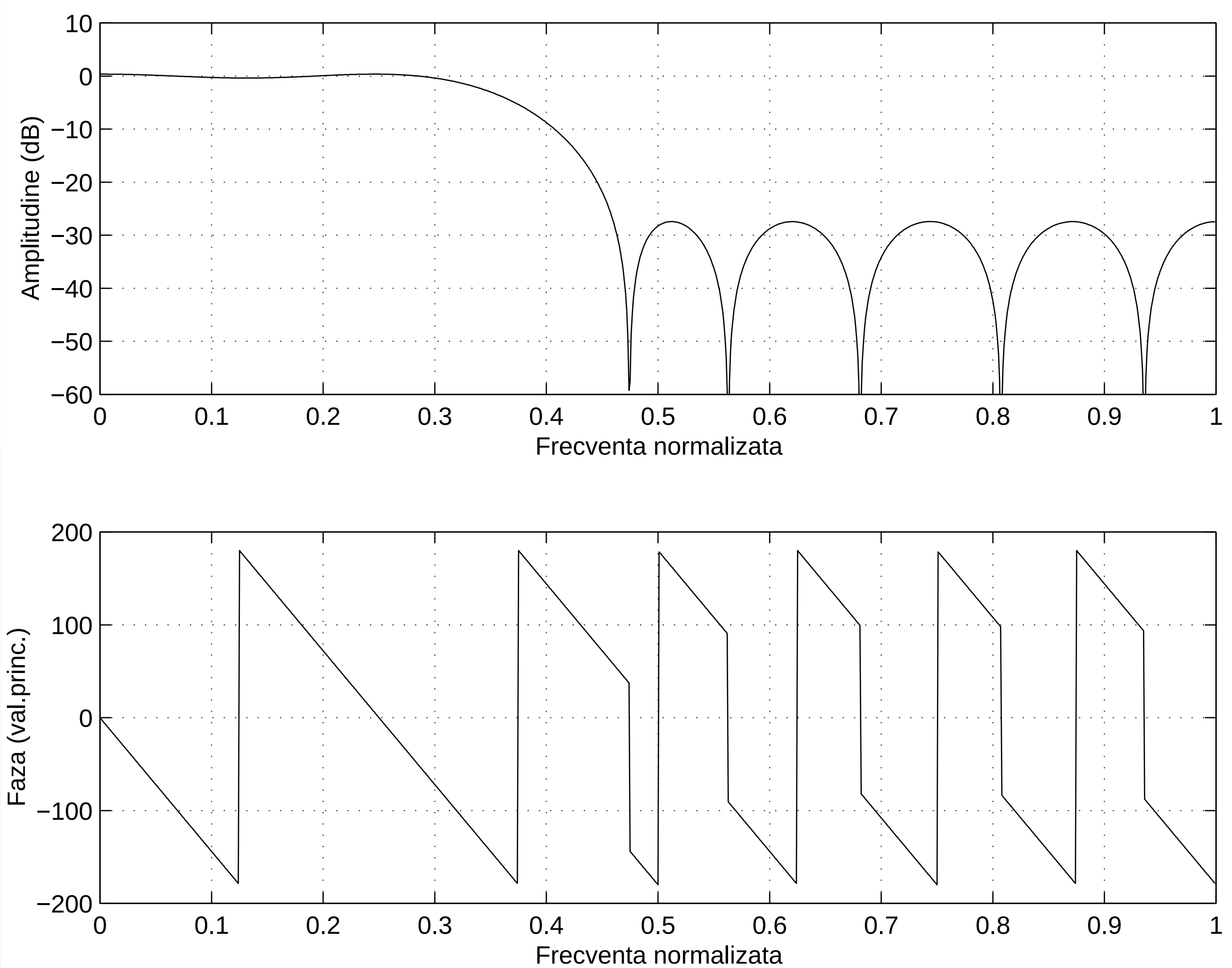
- Problema de optimizare este echivalentă cu programul liniar

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\xi \in \mathbb{R}^{M'+1}} & \gamma^T \xi \\ \text{cu restricţiile} & \Psi \xi \leq \beta \end{array}$$

- Numele de program liniar provine din faptul că atât criteriul cât şi restricţiile sunt liniare în variabila vectorială ξ
- Notaţia $\Psi \xi \leq \beta$ are semnificaţia că fiecare element al vectorului $\Psi \xi$ este mai mic sau egal cu elementul corespunzător al vectorului β
- Cu cât L este mai mare (discretizare mai fină), cu atât soluţia programului este mai aproape de soluţia problemei **F_OPTINF**

Exemplu de proiectare: filtru FIR trece-jos

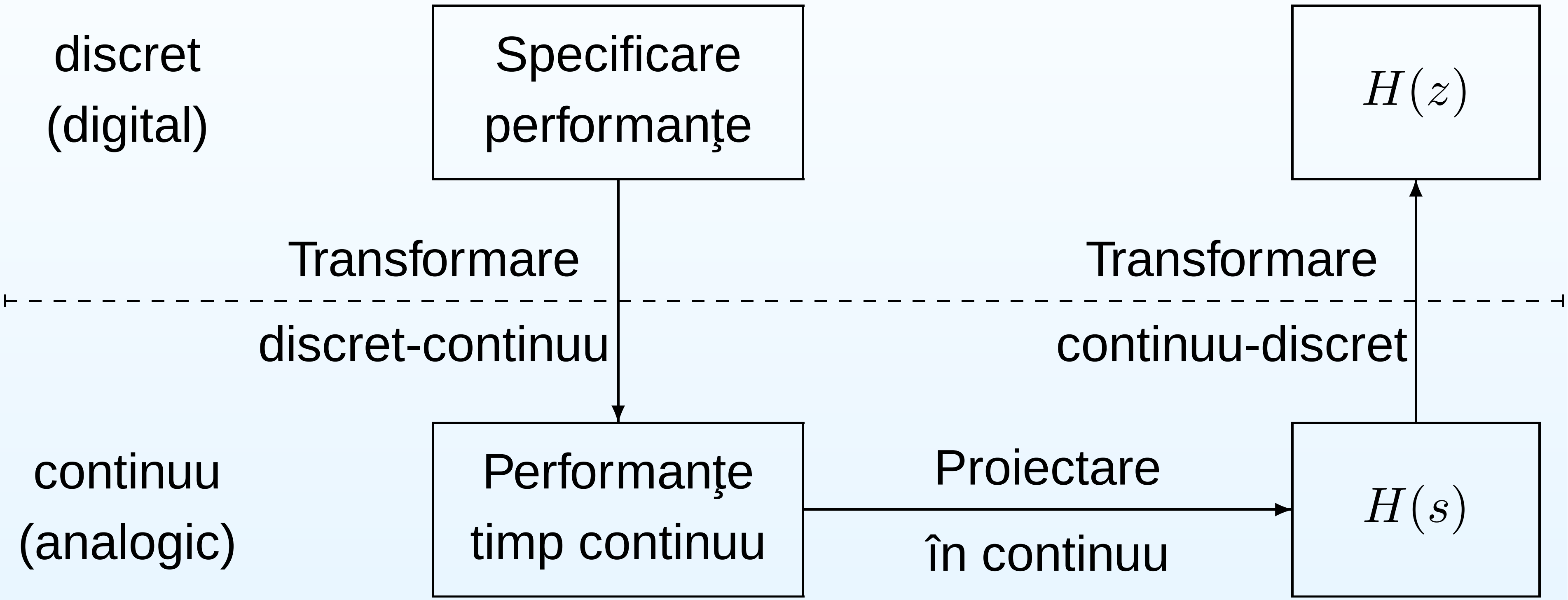
- $M = 16$, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.46\pi$, $L = 100$



Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare

- Filtrele analogice au fost primele utilizate în aplicaţii practice, cu decenii bune înaintea celor digitale
- Metodele de proiectare a filtrelor analogice erau deja bine dezvoltate atunci când a apărut necesitatea proiectării filtrelor digitale
- Metodă simplă de proiectare: transformarea (printr-o funcţie adecvată a) filtrelor analogice în filtre digitale
- Filtrele analogice sunt IIR, deci în mod natural se obţin filtre digitale IIR
- Dacă $H(s)$ şi $G(z)$ sunt funcţii de transfer în continuu, respectiv discret, răspunsurile în frecvenţă sunt $H(j\Omega)$, respectiv $G(e^{j\omega})$
- Transformarea continuu-discret este $z = f(s)$. Cu ea se transformă $H(s)$ în $H(z)$

Schema de proiectare



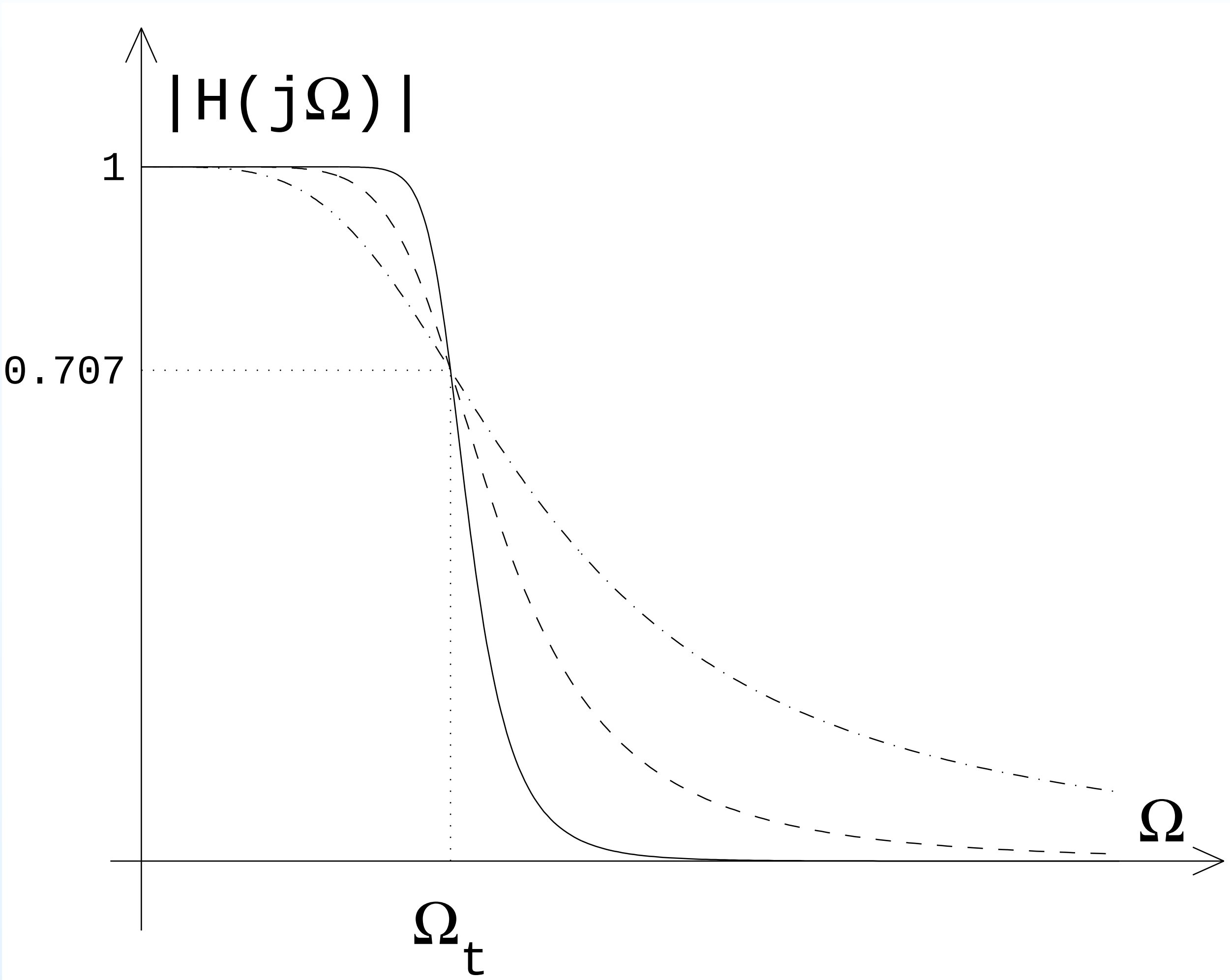
Filtrul Butterworth (analogic)

- Este definit de ordinul său N şi de o frecvenţă de tăiere Ω_t
- Răspunsul în frecvenţă al filtrului este

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_t)^{2N}}$$

- Amplitudinea răspunsului în frecvenţă al filtrului Butterworth este descrescătoare
- $|H(j\Omega_t)| = 1/\sqrt{2}$, $H(0) = 1$
- Avantaj pentru proiectare: răspunsul în frecvenţă are o formă analitică simplă

Caracteristica de frecvenţă a filtrului Butterworth



Funcţia de transfer a filtrului Butterworth

- Funcţia de transfer se determină punând $s = j\Omega$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_t)^{2N}}$$

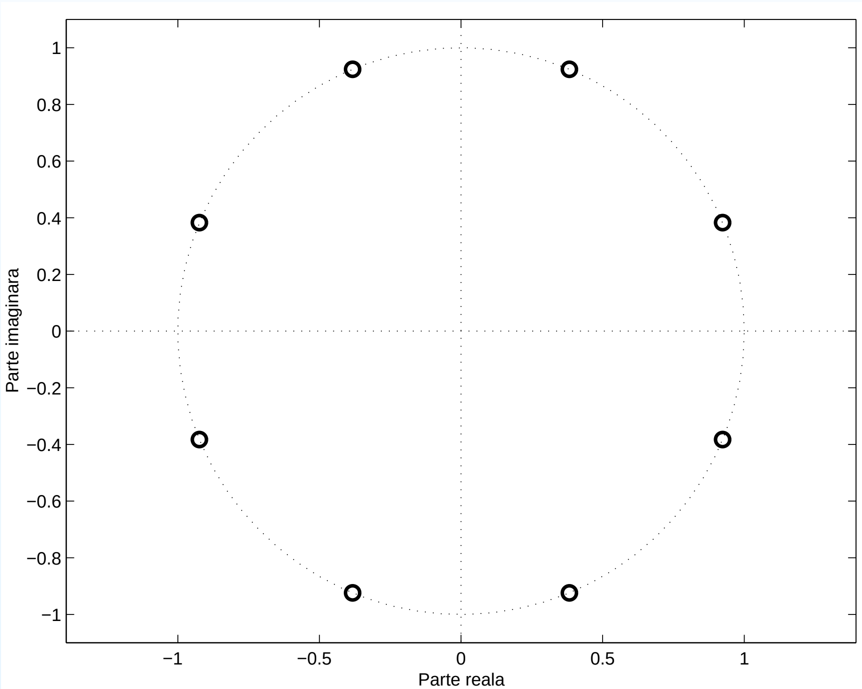
- Cei $2N$ poli ai funcţiei $H(s)H(-s)$ sunt definiţi de $(-1)^{1/2N} j\Omega_t$, deci au forma

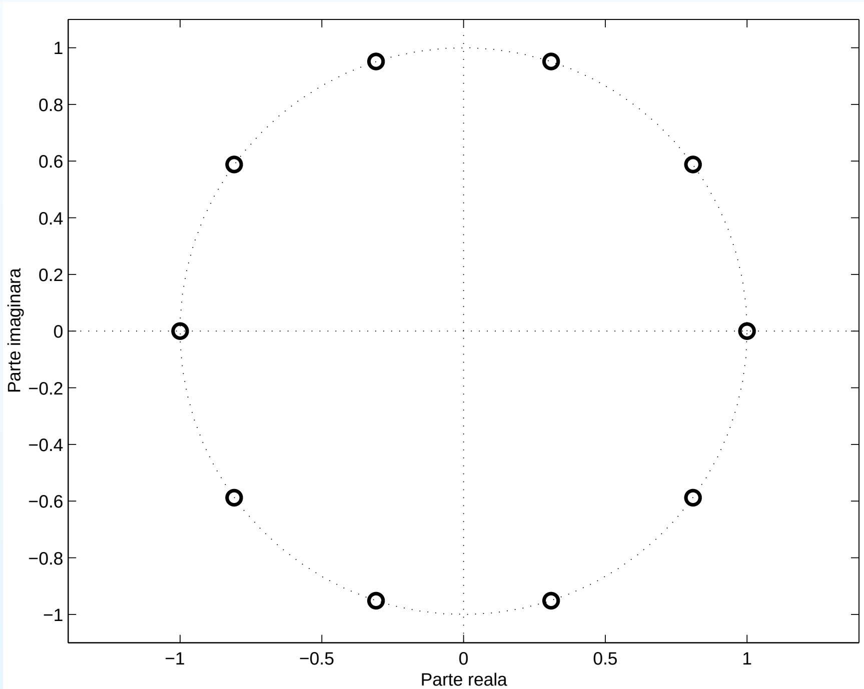
$$s_k = \Omega_t exp\left(-j\frac{\pi}{2N}(2k - 1 + N)\right), \quad k = 0 : 2N - 1$$

- Polii sunt plasaţi echidistant pe un cerc de rază Ω_t centrat în origine, simetric faţă de axa imaginară
- Pentru $H(s)$ se iau polii cu parte reală negativă, astfel încât $H(s)$ să fie o funcţie de transfer stabilă

Exemple de poli

- $N = 4$ (stânga), $N = 5$ (dreapta)





Filtre Chebyshev

- Filtrele Chebyshev de tip I (ordin N)

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_b)}$$

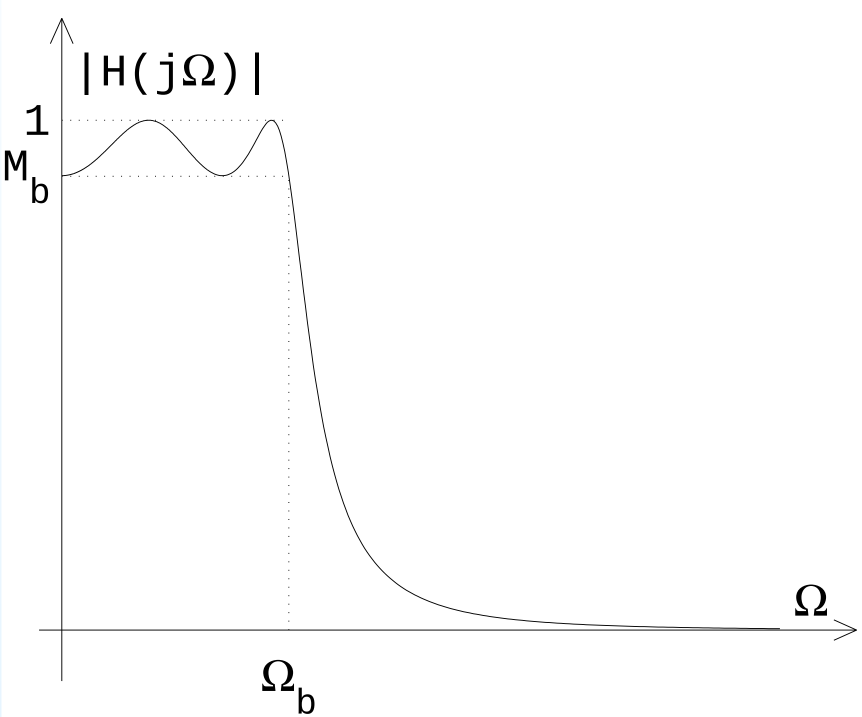
- $T_N(x)$ este polinomul Chebyshev de ordinul N

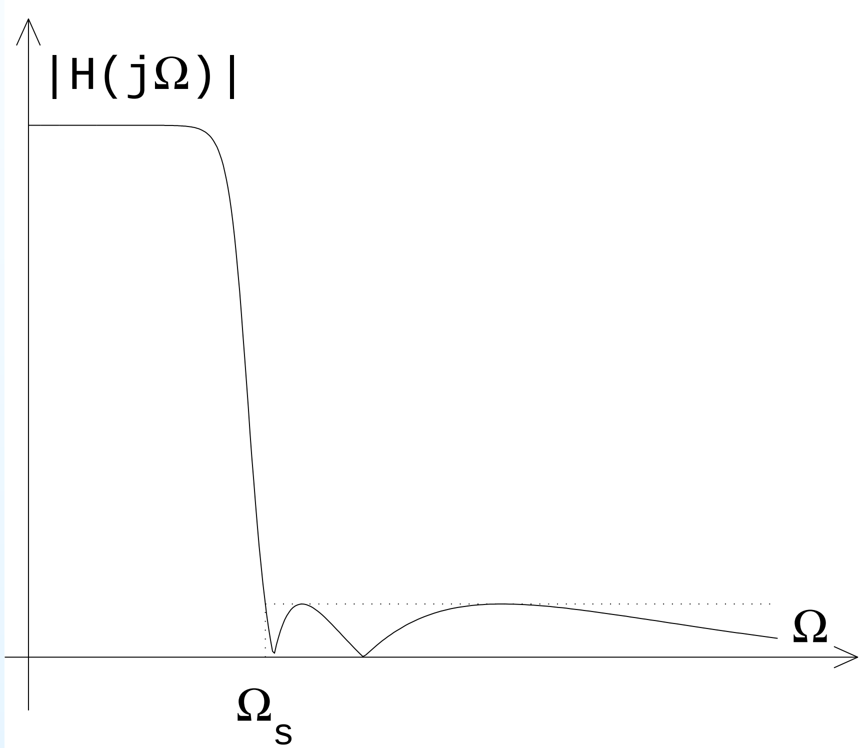
$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}(x)), & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases}$$

- Răspunsul are ondulaţii egale în banda de trecere şi este descrescător în banda de oprire
- Parametrul ϵ dictează înălţimea ondulaţiilor
- Filtrul Chebyshev de tipul II se obţine printr-o transformare a celui de tip I şi are ondulaţii egale în banda de oprire

Răspunsuri în frecvenţă

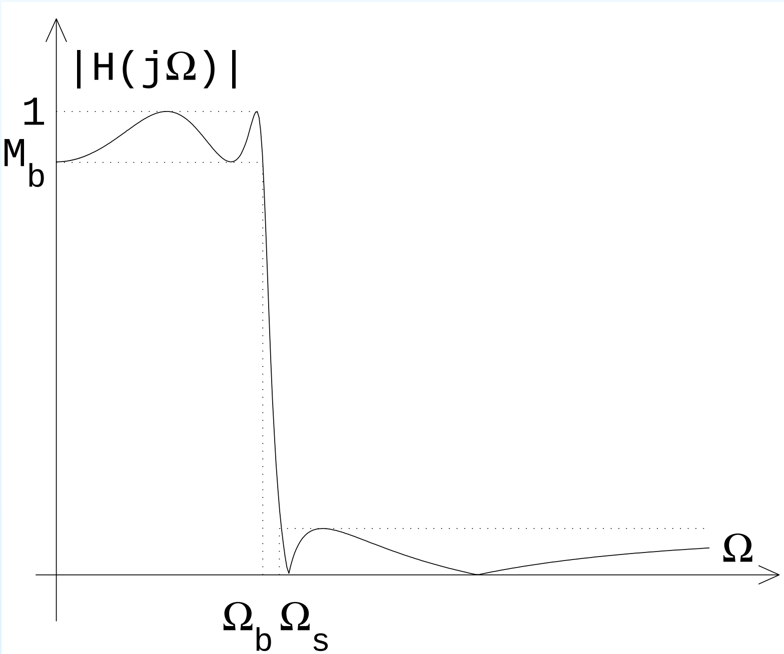
- Stânga: tip I, $N = 4$. Dreapta: tip II, $N = 6$





Filtrul eliptic

- $|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \dfrac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_b)}$
- $U_N(\cdot)$ este funcţia Jacobi eliptică de ordinul II
- Ondulaţii egale în banda de trecere şi în cea de oprire
- Caracteristică de frecvenţă pentru $N = 4$



Proprietăţile unei transformări continuu-discret

- O transformare continuu-discret $z = f(s)$ trebuie să aibă următoarele proprietăţi:
    - să fie biunivocă
    - să transforme semiplanul complex stâng în discul unitate, astfel încât un filtru analogic stabil să fie transformat într-un filtru digital stabil şi reciproc;
    - să transforme axa imaginară în cercul unitate, astfel încât răspunsul în frecvenţă $H(j\Omega)$ al unui filtru analogic să-şi păstreze alura în transformatul său digital $H(e^{j\omega})$ (notăm $H(s)$ filtrul analogic şi, cu aceeaşi literă, $H(z) = H(f(s))$ filtrul digital)

Transformarea biliniară (1)

- Transformarea *biliniară* este definită prin $z = \frac{1+s}{1-s}$
- Transformarea inversă este $s = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
- Înlocuind $s = j\Omega$ şi $z = e^{j\omega}$ rezultă

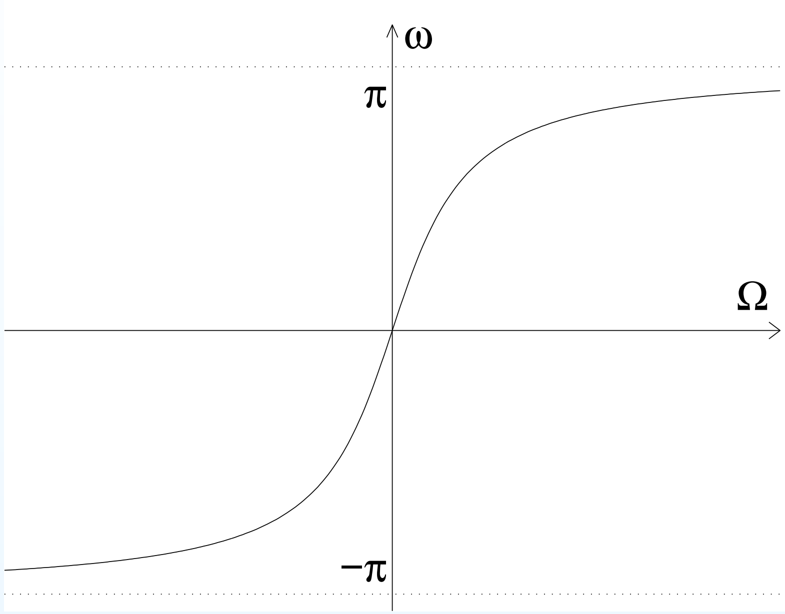
$$e^{j\omega} = \frac{1+j\Omega}{1-j\Omega}$$

- Transformarea continuu-discret a frecvenţelor este

$$\omega = 2arctg\Omega, \qquad \Omega = tg\frac{\omega}{2}$$

- Transformarea este neliniară

Transformarea biliniară (2)



- Transformarea biliniară transformă semiplanul complex stâng în discul unitate
- Notăm $s = u + jv$. Dacă $Re(s) = u < 0$, atunci $(1+u)^2 < (1-u)^2$ şi deci

$$|z|^2 = \left|\frac{1+s}{1-s}\right|^2 = \frac{(1+u)^2+v^2}{(1-u)^2+v^2} < 1$$

Filtrul Butterworth discret

- Fiind o funcţie crescătoare, transformarea în frecvenţă $\omega = 2arctg\Omega$ păstrează forma răspunsului în frecvenţă al unui filtru analogic
- Filtrul Butterworth analogic se transformă în

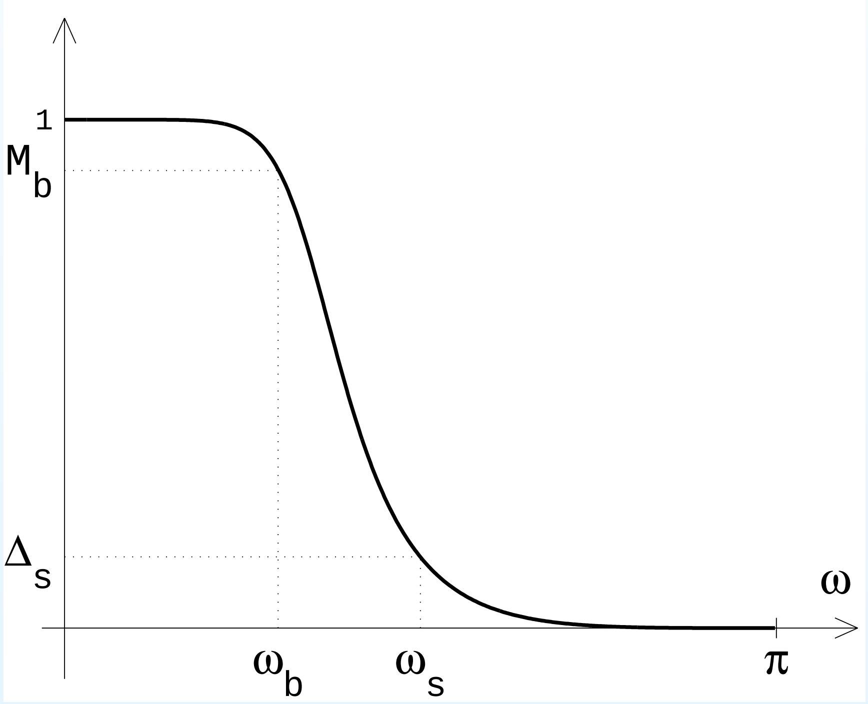
$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{tg(\omega/2)}{tg(\omega_t/2)}\right)^{2N}}, \quad \omega_t = 2arctg\Omega_t$$

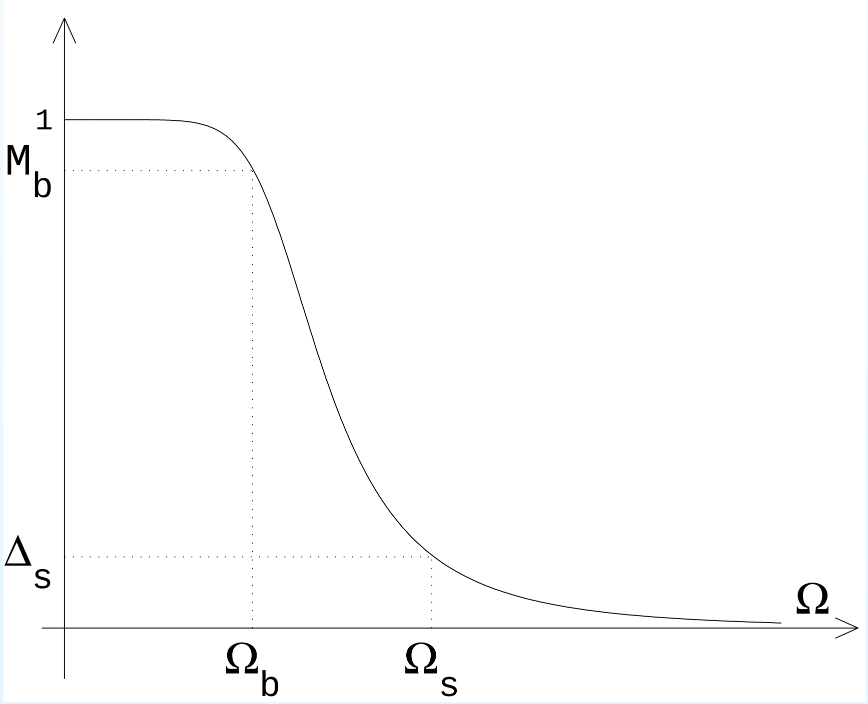
Filtrul Butterworth discret: proiectare

- Date de proiectare: ω_b, ω_s, Δ_b, Δ_s
- Etapa 1: transpunem cerinţele de proiectare în domeniul continuu
$$\Omega_b = tg\frac{\omega_b}{2}, \quad \Omega_s = tg\frac{\omega_s}{2}$$
- Etapa 2: găsim un filtru Butterworth $H(s)$ pentru care
$$|H(\Omega_b)| \geq 1 - \Delta_b, \ \ |H(\Omega_s)| \leq \Delta_s$$
- (Detalii în Lab. 6 sau în carte)
- Etapa 3: filtrul discret $H(z)$ se obţine aplicând transformarea biliniară filtrului analogic $H(s)$

Caracteristici de frecvenţă

- Filtru Butterworth discret (stânga), analogic (dreapta) ($M_b = 1 - \Delta_b$)





Transformări discret-discret în frecvenţă

- Filtrele IIR analogice discutate sunt de tip trece-jos, iar prin transformarea biliniară se obţin filtre digitale trece-jos
- Pentru a proiecta altfel de filtre digitale (trece-sus, trece-bandă etc.), se pot utiliza transformări în frecvenţă, care obţin filtrul dorit dintr-unul trece-jos
- O astfel de transformare $Z = G(z)$ trebuie
  - să fie inversabilă
  - să transforme discul unitate în el însuşi (să se conserve stabilitatea)
  - să transforme cercul unitate în el însuşi
- Toate transformările de acest tip sunt funcţii trece-tot !

Transformare trece-jos $\longrightarrow$ trece-sus

- Transformarea este trece-tot de ordinul 1

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} - c}{1 - cz^{-1}}, \quad c \in \mathbb{R}, \ |c| < 1$$

- Pe cercul unitate ($z = e^{j\omega}$, $Z = e^{j\theta}$):

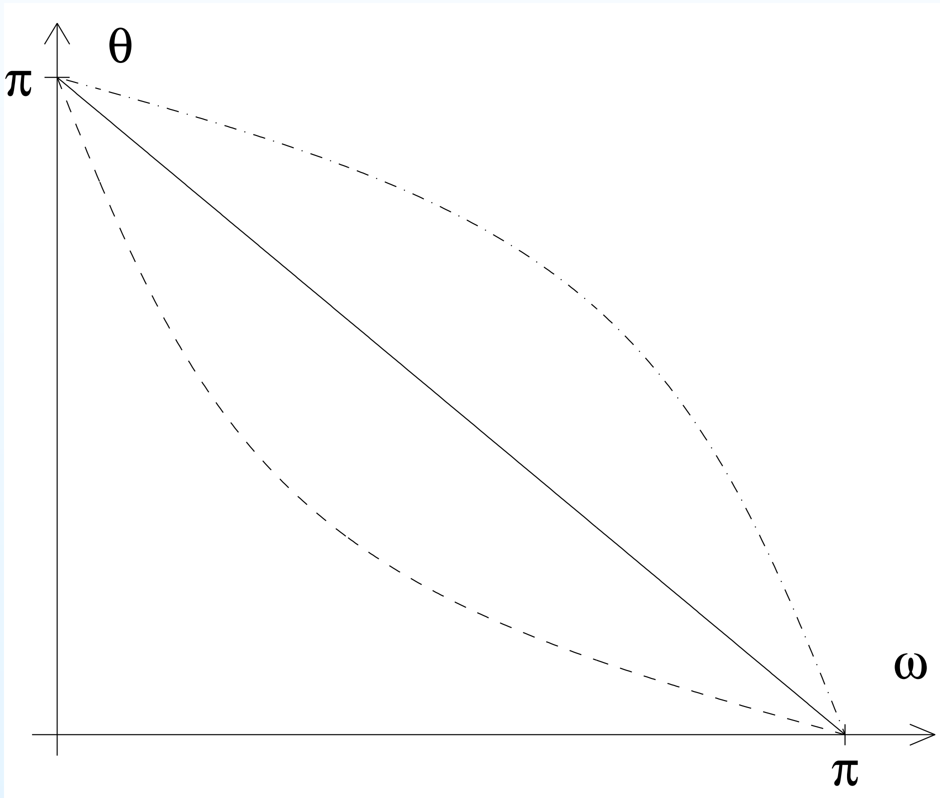
$$e^{-j\theta} = -\frac{e^{-j\omega} - c}{1 - ce^{-j\omega}} = \frac{2c - (1 + c^2)\cos\omega + j(c^2 - 1)\sin\omega}{1 + c^2 - 2c\cos\omega}$$

- Transformarea în frecvenţă este

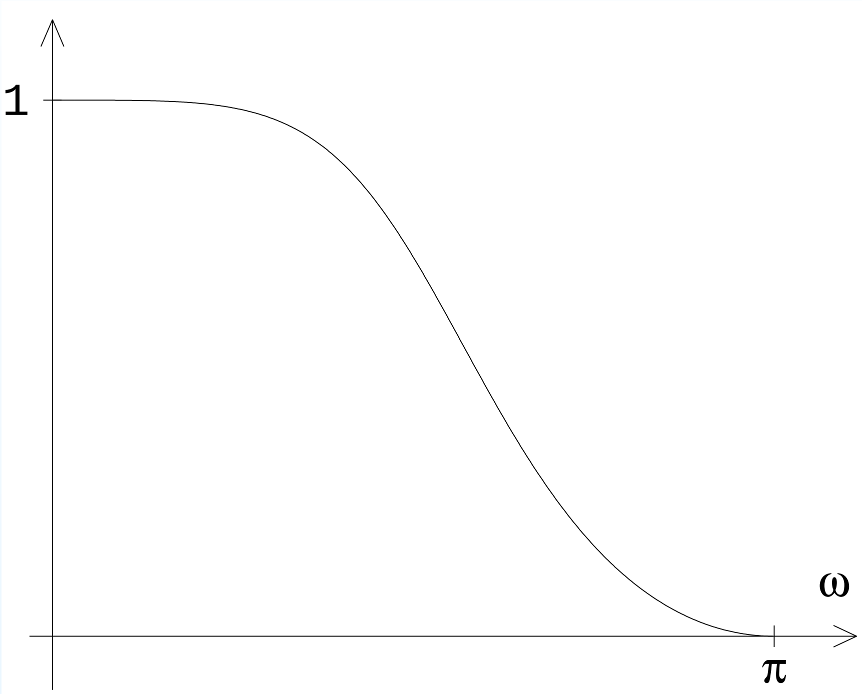
$$\theta = arctg\left[\frac{(1 - c^2)\sin\omega}{2c - (1 + c^2)\cos\omega}\right]$$

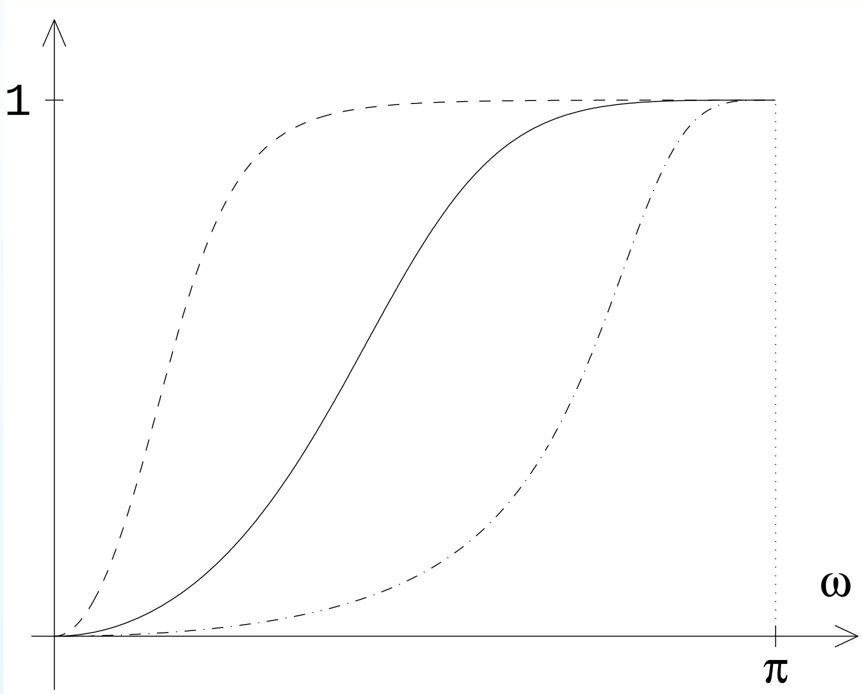
Graficul transformării în frecvenţă

- $c = 0$ (linie continuă), $c = -0.5$ (linie-punct), $c = 0.5$ (linie întreruptă)



Exemplu de filtre trece-sus





- Pentru $c = 0$, rezultă $Z = -z$, $\theta = \pi - \omega$
- Răspunsul în frecvenţă al filtrului trece-sus este obţinut prin oglindire faţă de verticala care trece prin $\pi/2$