Prelucrarea semnalelor

Capitolul 6: Cuantizare

Bogdan Dumitrescu

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Universitatea Politehnica Bucureşti

Cuprins

- Cuantizare (scalară)
- Cuantizorul uniform: proprietăţi, performanţe etc.
- Proiectarea unui cuantizor
  - Compandare
  - Algoritmul Lloyd-Max
- Cuantizare vectorială

Cuantizare—definiţii

- Fie $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ o mulţime de N valori reale, numite *coduri*
- Mulţimea $\mathcal{C}$ este numită *dicţionar* (sau listă de coduri—engl. codebook)
- Cuantizorul q asociază un cod fiecărei valori $x \in \mathbb{R}$, i.e. $q(x) = c_k$, subînţelegând prin aceasta că numărul real x este "aproximat" prin codul c_k din dicţionarul $\mathcal{C}$
- Aşadar, un *cuantizor* este o funcţie $q : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$
- Presupunem, fără pierdere de generalitate, că dicţionarul este ordonat, adică $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$

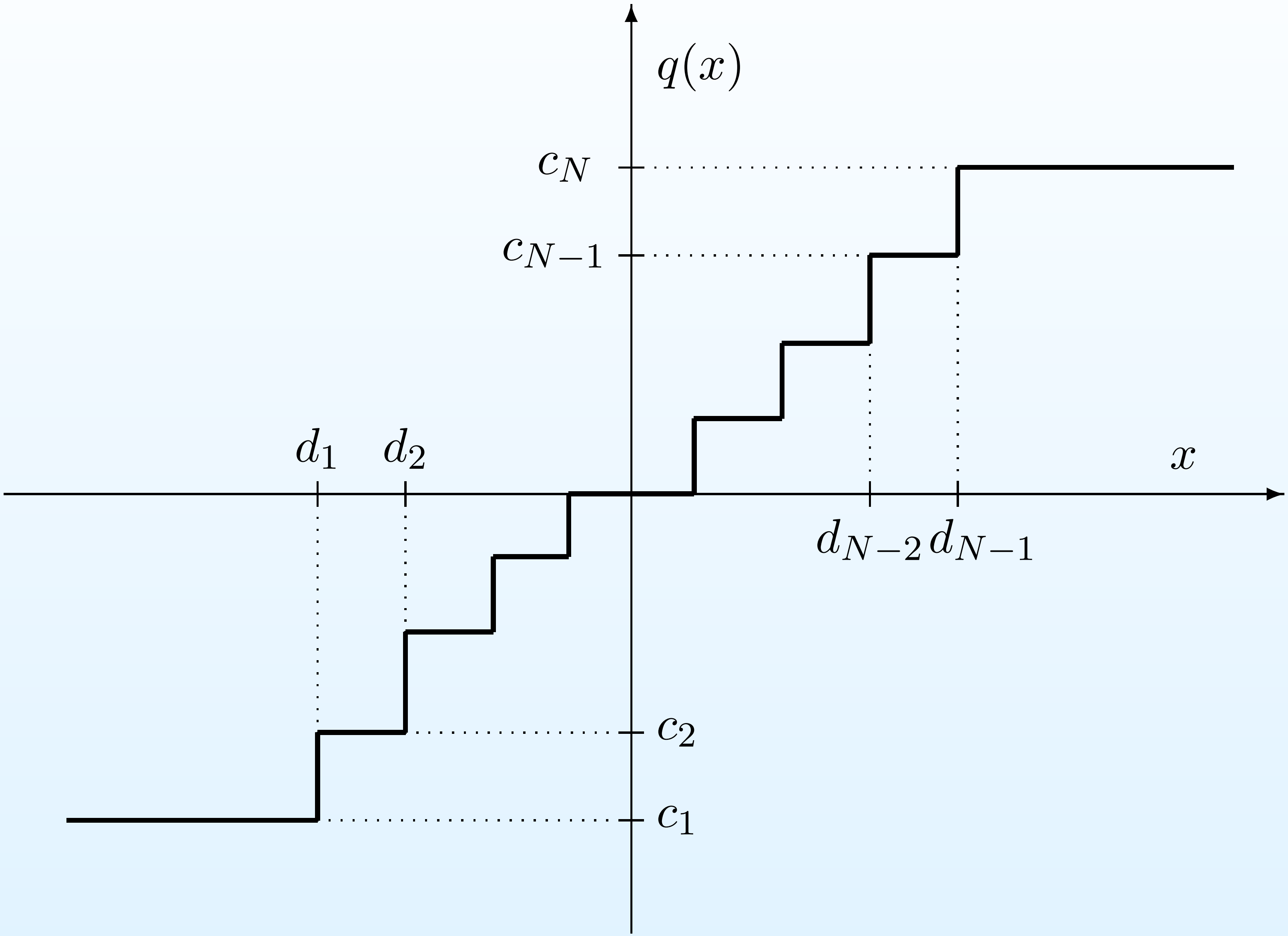
Celule Voronoi

- Fie q un cuantizor şi $\mathcal{C}$ dicţionarul asociat. Mulţimea

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = c_k\}$$

  se numeşte *celulă Voronoi* asociată codului c_k
- De obicei, fiecare celulă este un interval: $\mathcal{A}_k = (d_{k-1}, d_k]$
- Valorile d_k se numesc *puncte de decizie* (de frontieră)
- Punem $d_0 = -\infty$ şi $d_N = \infty$, dacă aceste valori nu sunt finite prin natura semnalului care se cuantizează

Graficul unui cuantizor



Cuantizor = codor + decodor

- Cuantizorul poate fi privit ca fiind obţinut din compunerea a două funcţii: codor şi decodor
- Notăm $\mathcal{N} = 1 : N$ mulţimea primelor N numere naturale
- Un *codor* este o funcţie $q_c : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ şi asociază unei valori $x \in \mathbb{R}$ un indice în dicţionar
- Un *decodor* este o funcţie $q_d : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, prin care un indice este transformat în codul corespunzător
- De multe ori, codorul este numit cuantizor
- Indicii produşi de codor sunt transmişi sau memoraţi (digital)
- Refacerea codului (decodarea) se face ulterior (eventual la distanţă)

Rezoluţia unui cuantizor

- Numărul de biţi necesar reprezentării numerelor din $\mathcal{N}$ (şi deci din dicţionarul $\mathcal{C}$), i.e.

$$r = \log_2 N,$$

  este numit *rezoluţie* (sau rată de codare) a cuantizorului
- Rezoluţia nu poate descrie singură performanţele cuantizorului
- Acestea depind şi de proprietăţile semnalului cuantizat
- Presupunem că semnalul cuantizat x este caracterizat de o densitate de probabilitate $p(x)$, i.e. are proprietăţi statistice cunoscute

Distorsiune

- Distorsiunea (eroarea pătratică) medie a unui cuantizor este

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - q(x))^2 p(x) dx$$

- Când celulele Voronoi sunt intervale:

$$D = \sum_{k=1}^{N} \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx$$

- Dacă interpretăm x ca pe un proces aleator:

$$D = E\left\{(x[n] - q(x[n]))^2\right\}$$

- Distorsiunea medie este uşor de calculat şi utilizat, dar poate să nu corespundă percepţiei subiective pentru anumite semnale (audio, imagini etc.)

Raportul semnal-zgomot

- Presupunem că semnalul (variabila aleatoare) x are medie nulă
- Raportul semnal-zgomot (SNR—signal to noise ratio) asociat unui cuantizor

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E\{x^2\}}{D} \quad \text{[dB]}$$

- Dacă semnalul nu are medie nulă, se foloseşte varianţa în loc de $E\{x^2\}$
- În general, despre cuantizoarele cu $SNR > 10$dB se spune că au rezoluţie înaltă; pentru acestea sunt valabile rezultatele asimptotice prezentate mai departe

Cuantizorul uniform

- Un cuantizor este *uniform* atunci când între codurile c_k şi punctele de decizie d_k există relaţiile

$$c_{k+1} - c_k = \Delta,$$
$$d_k = \frac{c_k + c_{k+1}}{2},$$

unde $\Delta > 0$ este pasul de cuantizare

- Distanţa dintre punctele de decizie este tot

$$d_{k+1} - d_k = \Delta$$

- De obicei se presupune că semnalul $x[n]$ ia valori într-un interval $[a, b]$ şi că $d_0 = a$, $d_N = b$. Pasul de cuantizare este

$$\Delta = \frac{b - a}{N}$$

Cuantizorul uniform—eroarea maximă

- Între cuantizoarele cu dicţionar conţinând N coduri, cuantizorul uniform *minimizează eroarea maximă*
- Dacă semnalul x ia valori în $[a, b]$, atunci eroarea maximă de cuantizare este cel puţin

$$\frac{b-a}{2N} = \frac{\Delta}{2},$$

adică eroarea maximă a cuantizorului uniform

Cuantizorul uniform—distorsiunea medie

- Presupunem că semnalul de intrare este uniform distribuit în intervalul $[a, b]$
- Densitatea de probabilitate asociată semnalului x este $p(x) = 1/(b-a)$
- Eroarea de cuantizare $\varepsilon = x - q(x)$ este uniform distribuită în intervalul $[-\Delta/2, \Delta/2]$, deci media sa este nulă: $E\{\varepsilon\} = 0$
- Distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^{N} \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \\ &= \frac{N}{b-a} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \left. \frac{\varepsilon^3}{3} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

Cuantizor uniform la rezoluţie înaltă (1)

- Presupunem acum că semnalul de intrare x este distribuit în intervalul $[a, b]$ cu o densitate de probabilitate oarecare $p(x)$
- Ipoteză de rezoluţie înaltă:
  - numărul N al nivelelor de cuantizare este mare
  - $p(x)$ este suficient de netedă
- Se poate considera că, pe fiecare interval de decizie (de lungime Δ), $p(x)$ este constantă, mai precis $p(x) = p_k$ pentru $x \in [d_{k-1}, d_k]$
- Se observă că

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \Delta = \int_a^b p(x) dx = 1$$

Cuantizor uniform la rezoluţie înaltă (2)

- Cu ipotezele precedente, distorsiunea medie este

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^{N} \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 d\xi = \frac{\Delta^3}{12} \sum_{k=1}^{N} p_k = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

- Se obţine aceeaşi expresie a distorsiunii ca în cazul distribuţiei uniforme a semnalului de intrare

Cuantizorul uniform—SNR la rezoluţie înaltă

- Presupunem că semnalul de intrare are medie zero şi varianţă σ^2, ceea ce nu este restrictiv
- Semnalul x ia valori în intervalul $[-a, a]$
- Densitatea de probabilitate $p(x)$ este o funcţie pară şi constantă pe fiecare interval de decizie
- Deoarece $N = 2^r$, pasul de cuantizare este $\Delta = 2a/2^r$
- Raportul semnal-zgomot are forma

$$\begin{aligned} SNR &= 10\log_{10}\frac{\sigma^2}{D} = 10\log_{10}\frac{12\sigma^2}{\Delta^2} = 10\log_{10}\frac{12\sigma^2 2^{2r}}{4a^2} \\ &= 20r\log_{10}2 + ct \approx 6r + ct \end{aligned}$$

- Concluzie: la rezoluţie înaltă, *fiecare bit suplimentar* utilizat la cuantizare (i.e. dublarea dimensiunii N a dicţionarului) *conduce la creşterea cu 6dB a SNR* a cuantizorului uniform

Implementarea unui cuantizor (1)

- Considerăm un cuantizor definit de codurile c_k, $k = 1 : N$, şi punctele de decizie d_k, $k = 0 : N$
- Ne punem problema modului de calcul al codului $c_k = q(x)$ (sau al indicelui k asociat), pentru o valoare oarecare (cunoscută) x a intrării
- Indicele k este cel pentru care

  $$d_{k-1} \leq x < d_k$$

  (În cazul în care x este chiar un punct de decizie, trebuie să evităm ambiguitatea alegerii, de aceea putem alege inegalităţile ca mai sus.)
- Căutarea secvenţială în $1 : N$ a indicelui k este ineficientă, deoarece implică N comparaţii în cazul cel mai defavorabil

Implementarea unui cuantizor (2)

- Algoritmul cel mai eficient este cel bazat pe *dihotomie*
- Dacă $x < d_{N/2}$, soluţia este în mulţimea $0 : N/2 - 1$; altfel, soluţia se află în $N/2 : N - 1$
- Căutarea continuă asemănător, până când înjumătăţirea repetată reduce la un singur indice mulţimea în care se caută
- Numărul de comparaţii este $\lceil r \rceil = \lceil \log_2 N \rceil$
- Implementarea cuantizorului *uniform* cu $x_0 = a$, $x_N = b$, este extrem de simplă, indicele k având expresia

$$k = \left\lfloor \frac{x-a}{b-a} N \right\rfloor + 1$$

(Pentru $x = b$ formula dă valoarea incorectă $k = N + 1$, ceea ce se poate corecta uşor la implementare.)

Cuantizor neuniform—distorsiune

- Semnal de intrare cu densitatea de probabilitate constantă pe fiecare interval de decizie: $p(x) = p_k, \forall x \in [d_{k-1}, d_k]$
- Se consideră un cuantizor oarecare (neuniform)
  - punctele de decizie d_k, $k = 0 : N$, sunt date
  - codurile sunt plasate (optim) la mijlocul intervalului de decizie $c_k = (d_{k-1} + d_k)/2$
- Distorsiunea medie este

$$D = \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 dx \overset{x=\xi+c_k}{=} \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\Delta_k/2}^{\Delta_k/2} \xi^2 d\xi = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{N} p_k \Delta_k^3$$

- (Pentru cuantizorul uniform se obţine $D = \Delta^2/12$)

De ce cuantizare neuniformă ?

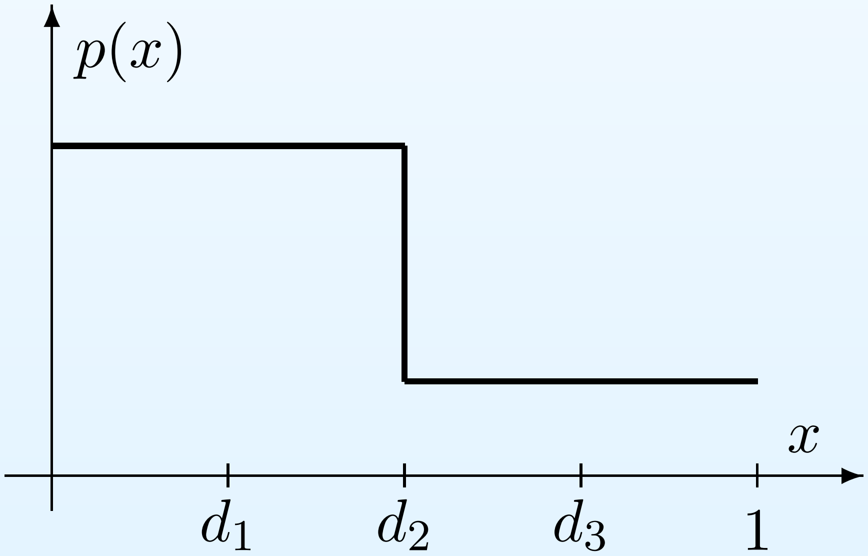
- Pentru distribuţie uniformă a semnalului de intrare, cuantizorul uniform este optim, în sensul că are distorsiune medie minimă
- Dacă însă distribuţia este neuniformă, este posibil ca alte cuantizoare, neuniforme, să fie optime
- Intuitiv, codurile trebuie să fie mai dese acolo unde probabilitatea intrării este mai mare şi mai rare acolo unde probabilitatea e mică

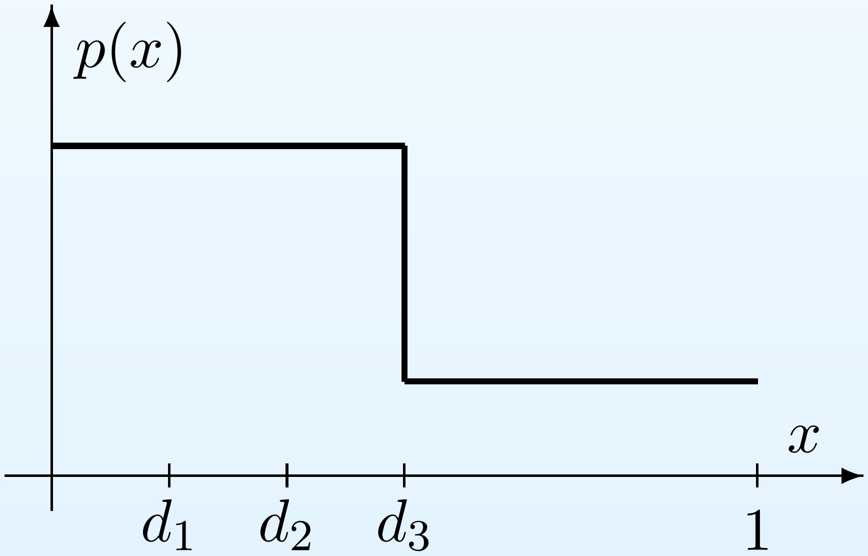
Exemplu (1)

- Fie un semnal de intrare cu densitatea de probabilitate

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă} \;\; x \in [0, 1/2] \\ \beta, & \text{dacă} \;\; x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- Două cuantizoare, cel uniform şi unul neuniform





Exemplu (2)

- Pentru cuantizorul uniform, $\Delta = 1/4$ şi

$$D_1 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{192} = 0.005208$$

- Cuantizorul neuniform are punctele de decizie $d_0 = 0$, $d_1 = 1/6$, $d_2 = 1/3$, $d_3 = 1/2$, $d_4 = 1$
- Codurile sunt plasate optim la mijlocul intervalelor de decizie
- Avem $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/6$, $\Delta_4 = 1/2$ şi $p_1 = p_2 = p_3 = \alpha$, $p_4 = \beta = 2 - \alpha$
- Distorsiunea medie este

$$D_2(\alpha) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{4} p_k \Delta_k^3 = \frac{9 - 4\alpha}{432}$$

Exemplu (3)

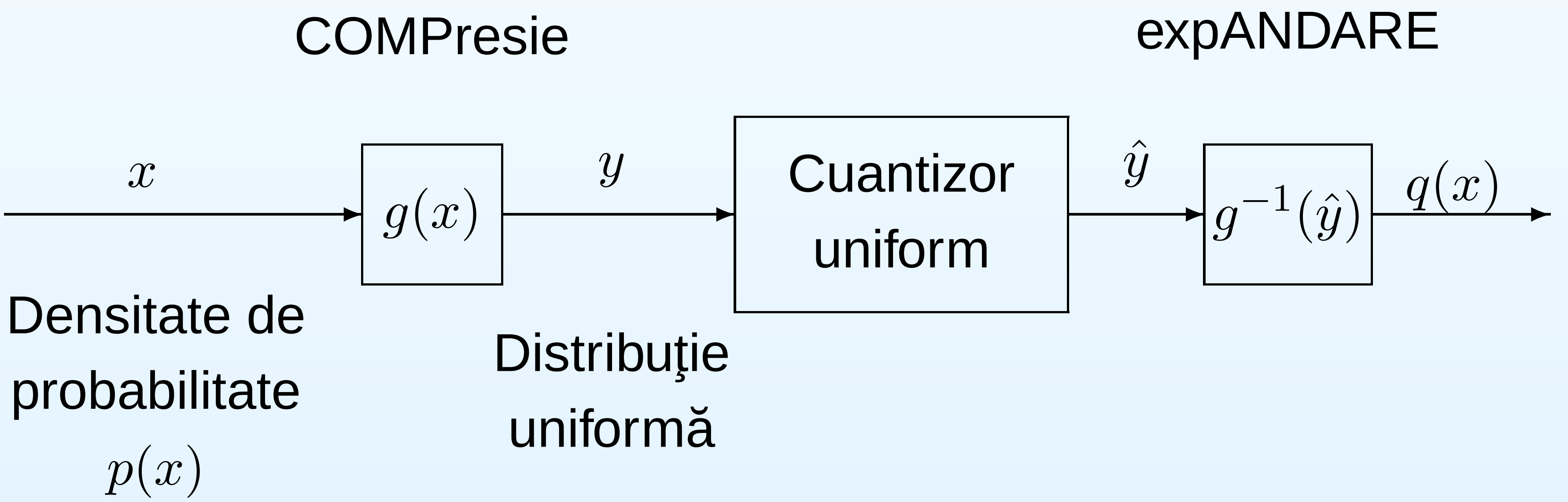
- Se obţine $D_2(\alpha) = D_1$ pentru $\alpha = 1.6875$, deci $D_2(\alpha) \leq D_1$ pentru $\alpha \in [1.6875, 2]$
- La limită, se obţine $D_2(2) = 0.00231$, adică o valoare mult mai mică decât D_1
- Exemplul arată că un cuantizor neuniform poate fi mai bun decât cel uniform
- Atenţie: acest cuantizor nu este neapărat cel optim !

Proiectarea unui cuantizor

- Date de proiectare:
  - distribuţia semnalului de intrare, în formă analitică, sau prin date obţinute experimental
  - dimensiunea dicţionarului (N) sau rezoluţia r
- Rezultatul proiectării:
  - dicţionarul $\mathcal{C}$ (codurile c_k, $k = 1 : N$)
  - punctele de decizie d_k, $k = 0 : N$

Compandare

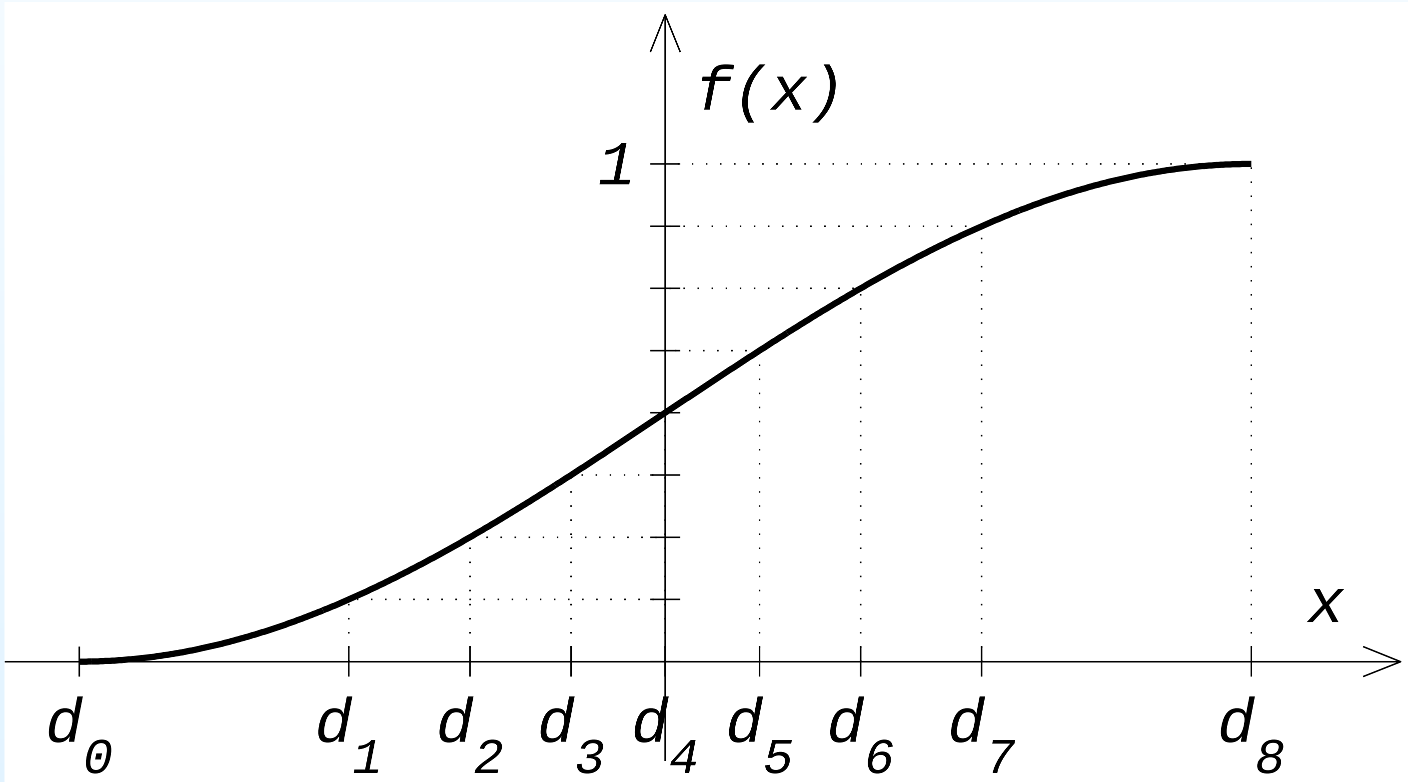
- Semnalul x, cu densitate de probabilitate (neuniformă) $p(x)$, este transformat prin funcţia $g(x)$, în încercarea de a obţine un semnal y cu distribuţie uniformă
- Proiectarea unui compandor se rezumă la găsirea funcţiei g



Proiectarea unui compandor (1)

- Funcţia cumulativă de probabilitate este

$$f(x_0) = \text{Prob}(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx, \quad \text{cu} \quad f : \mathbb{R} \to [0,1]$$



Proiectarea unui compandor (2)

- Împărţim intervalul $[0, 1]$ de pe axa verticală în N intervale egale ($N = 8$ în figură), separate de punctele $y_k = k/N$, $k = 0 : N$
- Pe axa orizontală, definim punctele corespondente $d_k \in \mathbb{R}$, $f(d_k) = y_k$, $k = 0 : N$
- Se observă că

$$\text{Prob}(d_{k-1} \le x \le d_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx = f(d_k) - f(d_{k-1}) = \frac{1}{N}$$

- Alegând d_k drept puncte de decizie pentru un cuantizor al semnalului x, atunci probabilitatea ca x să aparţină unei celule Voronoi $[d_{k-1}, d_k]$ este aceeaşi indiferent de celulă

Proiectarea unui compandor (3)

- Concluzie: în schema de compandare alegem funcţia g de compresie identică cu funcţia de probabilitate f
- Semnalul $y = g(x)$ nu va avea neapărat distribuţie uniformă, dar faptul că Prob$(y_{k-1} \leq y \leq y_k) = 1/N$ asigură o bună aproximaţie a distribuţiei uniforme
- Compandorul obţinut prin procedeul de mai sus nu este neapărat optim, deoarece densitatea de probabilitate în fiecare interval de decizie nu este constantă
- Compandorul realizează însă o bună aproximaţie a cuantizorului optim, în special la rezoluţie înaltă

Compandoare practice

- În cazul frecvent în care funcţia de probabilitate $f(x)$ nu este cunoscută analitic, dacă semnalul de intrare este staţionar, se poate estima experimental $f(x)$
- Când estimarea este imposibilă din considerente de timp real, se utilizează compresoare $g(x)$ simple şi robuste
- Graficul funcţiei $g(x)$ are de obicei celule Voronoi mai mari pentru valori mari (şi mai puţin frecvente) ale semnalului şi celule mici pentru valori în preajma lui zero
- Un exemplu este legea-μ utilizată în telefonia digitală

$$g_\mu(x) = a\frac{\ln(1+\mu|x|/a)}{\ln(1+\mu)}sgn(x) \in [-1,1]$$

- Se presupune că semnalul este limitat la valori $x \in [-a,a]$

Condiţii de optimalitate

- Presupunem cunoscute
  - $p(x)$—densitatea de probabilitate a semnalului de intrare
  - N—dimensiunea dicţionarului
- Studiem relaţiile dintre codurile c_k şi punctele de decizie d_k pentru cuantizorul optim, cel pentru care distorsiunea medie este minimă

Puncte de decizie optime pentru coduri date

- Presupunem fixate codurile c_k, $k = 1 : N$
- Dorim să aflăm punctele de decizie optime pentru aceste coduri
- Datorită formei cumulative a distorsiunii medii, putem reduce studiul la un singur interval $[c_k, c_{k+1}]$
- Distorsiunea este minimizată dacă, pentru orice $x \in [c_k, c_{k+1}]$, valoarea $q(x)$ este codul *cel mai apropiat* de x
- Aşadar punctul de decizie d_k se află la mijlocul intervalului $[c_k, c_{k+1}]$, i.e.

$$d_k = (c_k + c_{k+1})/2, \quad k = 1 : N - 1$$

Coduri optime pentru puncte de decizie date

- Presupunem fixate punctele de decizie d_k, $k = 0 : N$
- Dorim să aflăm codurile optime pentru aceste puncte de decizie
- Din nou, putem reduce studiul la o singură celulă Voronoi (dată) $[d_{k-1}, d_k]$, pentru care căutăm codul optim, anume valoarea c_k care minimizează distorsiunea

$$D_k = \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx \quad (1)$$

Lemă

- Fie ξ o variabilă aleatoare
- Constanta α care minimizează eroarea pătratică medie $E\{(\xi - \alpha)^2\}$ este $\alpha = E\{\xi\}$, adică media variabilei
- *Demonstraţie:* notăm $\mu = E\{\xi\}$ media variabilei aleatoare
- Observăm că avem

$$E\{(\xi - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu + \mu - \alpha)^2\} = E\{(\xi - \mu)^2\} + (\mu - \alpha)^2,$$

deoarece $E\{(\xi - \mu)\} = 0$

- În dreapta expresiei de mai sus, primul termen este constant, deci minimul se obţine luând $\alpha = \mu$

Codul optim: centroidul celulei Voronoi (1)

- Valoarea c_k care minimizează distorsiunea este centrul de masă (centroidul) celulei Voronoi $\mathcal{A}_k = [d_{k-1}, d_k]$, i.e.

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \frac{\displaystyle\int_{d_{k-1}}^{d_k} xp(x)dx}{\displaystyle\int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx} \qquad (2)$$

- *Demonstraţie.* Notăm

$$p_k = \text{Prob}(x \in \mathcal{A}_k) = \int_{d_{k-1}}^{d_k} p(x)dx$$

probabilitatea ca semnalul de intrare să ia valori în celula Voronoi considerată

Codul optim: centroidul celulei Voronoi (2)

- Distorsiunea pe $[d_{k-1}, d_k]$ poate fi scrisă în forma

$$D_k = p_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 \frac{p(x)}{p_k} dx = p_k E\{(x - c_k)^2 \mid x \in \mathcal{A}_k\},$$

  deoarece $p(x)/p_k$ are semnificaţie de densitate de probabilitate a semnalului x, atunci când considerăm doar valorile din celula Voronoi $\mathcal{A}_k$

- Folosind Lema, obţinem

$$c_k = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\} = \int_{d_{k-1}}^{d_k} x \frac{p(x)}{p_k} dx,$$

  de unde rezultă imediat (2)

Observaţii

- Condiţiile (1) şi (2) sunt necesare pentru optimalitate, dar nu neapărat suficiente
- Ele sunt satisfăcute şi de minime locale ale distorsiunii medii, nu doar de minimul global
- Pentru o densitate uniformă de probabilitate a intrării în intervalul $[a, b]$, cuantizorul uniform satisface condiţiile de optimalitate. Relaţia (1) este evident adevărată, iar (2) devine

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{x}{b-a} dx}{\displaystyle\int_{d_{k-1}}^{d_k} \frac{1}{b-a} dx} = \frac{\displaystyle\int_{d_{k-1}}^{d_k} x dx}{d_k - d_{k-1}} = \frac{d_k^2 - d_{k-1}^2}{2(d_k - d_{k-1})} = \frac{d_{k-1} + d_k}{2}$$

Algoritmul Lloyd-Max

0. Se dă numărul de nivele de cuantizare N. Se alege un dicţionar iniţial $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_N\}$. Se alege o toleranţă ϵ. Se iniţializează pasul de iterare $i = 0$
1. Se calculează punctele de decizie optime d_k, $k = 1 : N - 1$, pentru codurile c_k, conform relaţiei (1)
2. Se calculează codurile optime c_k, $k = 1 : N$, pentru punctele de decizie d_k, conform relaţiei (2)
3. Calculează distorsiunea medie curentă
$$D^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - c_k)^2 p(x) dx$$
4. Dacă
$$\frac{D^{(i-1)} - D^{(i)}}{D^{(i)}} < \epsilon,$$
atunci stop. Altfel, se pune $i \leftarrow i + 1$ şi se reia de la pasul 1

Algoritmul Lloyd-Max—comentarii

- Distorsiunea scade la fiecare pas: pentru e.g. puncte de decizie date, noile coduri minimizează distorsiunea, aşadar produc o distorsiune mai mică decât codurile de la iteraţia anterioară
- Algoritmul converge către un punct staţionar, care este un minim local (nu neapărat cel global)
- Iniţializări diferite ale algoritmului pot produce rezultate diferite

Exemplu (1)

- Studiem evoluţia algoritmului Lloyd-Max pentru
  - intrare uniform distribuită $x \in [0, 1]$
  - dimensiunea dicţionarului $N = 2$
- Singurul punct de decizie care se modifică în algoritm este d_1 (celelalte sunt $d_0 = 0$, $d_2 = 1$)
- Pentru coduri date, punctul optim de decizie este $d_1 = (c_1 + c_2)/2$
- Pentru d_1 dat, ţinând seama de distribuţia uniformă, codurile optime sunt

$$c_1 = d_1/2, \;\; c_2 = (d_1 + 1)/2$$

Exemplu (2)

- Evoluţia algoritmului Lloyd-Max este următoarea

Iniţializare	$c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.7$
Iteraţia 1	$d_1 = 0.5$ $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.75$	$d_1 = 0.45$ $c_1 = 0.225$, $c_2 = 0.725$
Iteraţia 2	idem	$d_1 = 0.475$ $c_1 = 0.2375$, $c_2 = 0.7375$
Iteraţia 3		$d_1 = 0.4875$ etc.

- Pentru ambele iniţializări, algoritmul converge la codurile optime; cuantizorul optim este cel uniform
- Prima iniţializare: convergenţă într-o singură iteraţie
- A doua iniţializare: convergenţă asimptotică

Proiectare utilizând date empirice

- În forma dată anterior, algoritmul Lloyd-Max se bazează pe cunoaşterea densităţii de probabilitate $p(x)$ a semnalului de intrare
- Presupunem acum că dispunem doar de M eşantioane ale semnalului de intrare, anume x_ℓ, $\ell = 1 : M$; notăm $\mathcal{X}$ mulţimea acestor eşantioane
- Numărul M este suficient de mare în raport cu N
- Structura algoritmului Lloyd-Max rămâne aceeaşi, dar calculul codurilor trebuie adaptat structurii discrete a celulelor Voronoi

Condiţii de optimalitate pentru date empirice

- Pentru coduri fixate, o celulă Voronoi care respectă condiţia de optimalitate (1) este mulţimea finită

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X},\ \ell = 1 : M \mid |x_\ell - c_k| \leq |x_\ell - c_i|,\ i = 1 : N, i \neq k\} \tag{3}$$

- Aşadar celula asociată codului c_k conţine eşantioanele din $\mathcal{X}$ care sunt mai aproape de acest cod decât de oricare altul
- Centrul de masă al unei celule se calculează în mod natural prin media eşantioanelor din celula respectivă

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell \tag{4}$$

Algoritmul Lloyd-Max—date empirice

0. Se dau M eşantioane ale semnalului de intrare, x_ℓ, $\ell = 1 : M$. Se alege un dicţionar iniţial $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_N\}$
1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete conform relaţiei (3)
2. Se recalculează codurile c_k, $k = 1 : N$, conform relaţiei (4)
3. Se repetă paşii 1 şi 2 până când distorsiunea

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} (x_\ell - c_k)^2$$

nu mai scade semnificativ

Exemplu (1)

- Studiem evoluţia algoritmului Lloyd-Max atunci când se cunosc $M = 6$ eşantioane ale intrării

$$\mathcal{X} = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

- Presupunem că, atunci când un eşantion este egal depărtat de două coduri, el face parte din celula Voronoi a codului mai mare

Exemplu (2)

Iniţializare	$c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.7$	$c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.5$
Iteraţia 1	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2, 0.4\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.8$	$\mathcal{A}_1 = \{0, 0.2\}$ $\mathcal{A}_2 = \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.7$
Iteraţia 2	idem	idem

- Pentru ambele iniţializări, algoritmul converge într-o iteraţie, dar la cuantizoare diferite
- Pentru a doua iniţializare, după iteraţia 1, eşantionul 0.4 este egal depărtat de codurile $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.7$. Dacă schimbăm regula adoptată şi includem acest eşantion în celula $\mathcal{A}_1$ (a codului mai mic), atunci rezultatul se schimbă şi obţinem aceleaşi coduri ca pentru prima iniţializare

Cuantizare vectorială—definiţii (1)

- Un cuantizor vectorial este o funcţie $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ este un dicţionar cu N elemente
- Spre deosebire de cuantizarea scalară, unde fiecare element al intrării este cuantizat separat, acum se cuantizează simultan n valori ale intrării, sub forma unui vector în $\mathbb{R}^n$
- Codul $q(x) = c_k$, $k = 1 : N$, este şi el un vector de dimensiune n
- Pentru reprezentarea unui cod sunt necesari $\log_2 N$ biţi. Deoarece un cod reprezintă n valori ale intrării, rezoluţia unui cuantizor vectorial este

$$r = (\log_2 N)/n$$

Cuantizare vectorială—definiţii (2)

- Celula Voronoi asociată codului c_k este

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = c_k\} \subset \mathbb{R}^n$$

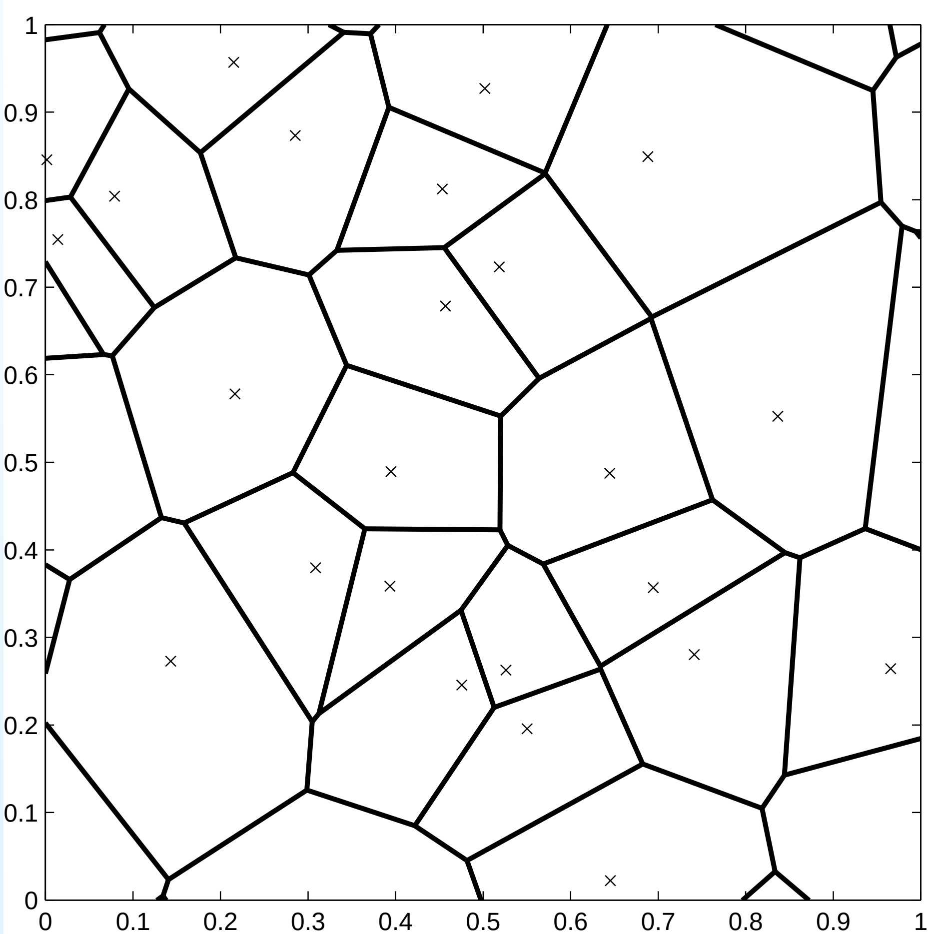
- Un cuantizor ale cărui celule Voronoi sunt convexe se numeşte *regulat*
- Distorsiunea medie a unui cuantizor vectorial este

$$D = \int_{\mathbb{R}^n} \|x - q(x)\|^2 p(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathcal{A}_k} \|x - c_k\|^2 p(x)dx,$$

unde $p(x)$ este densitatea de probabilitate a seturilor de n valori ale intrării. Norma utilizată este cea euclidiană

Cuantizor 2D cu coduri aleatoare

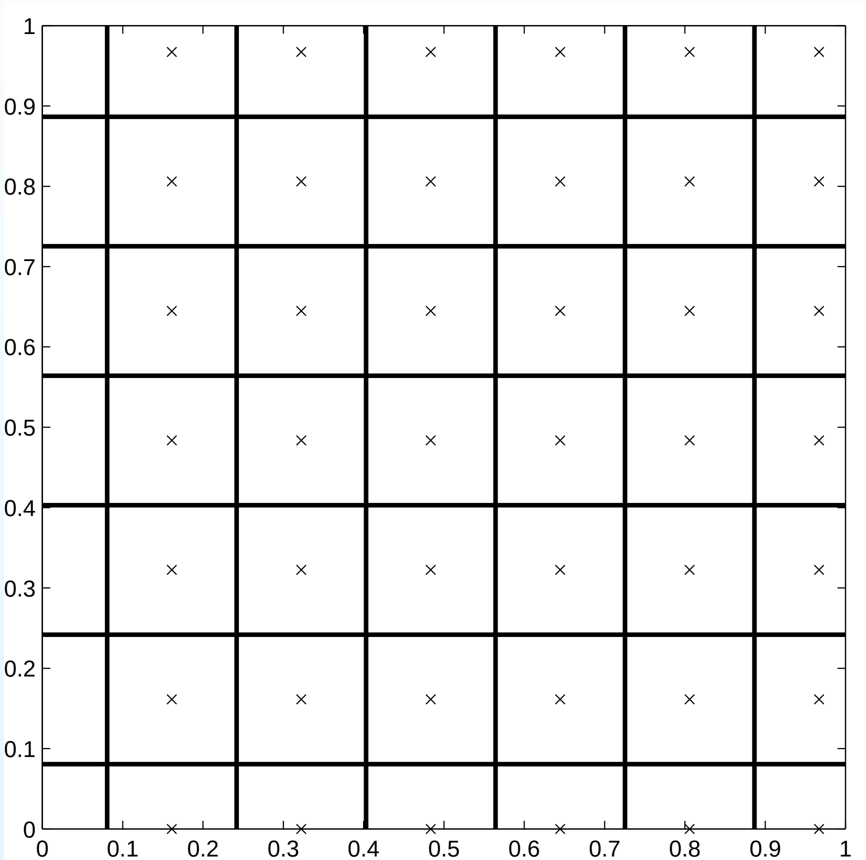
- Celulele Voronoi sunt optime ! (vom vedea mai târziu condiţiile de optimalitate)

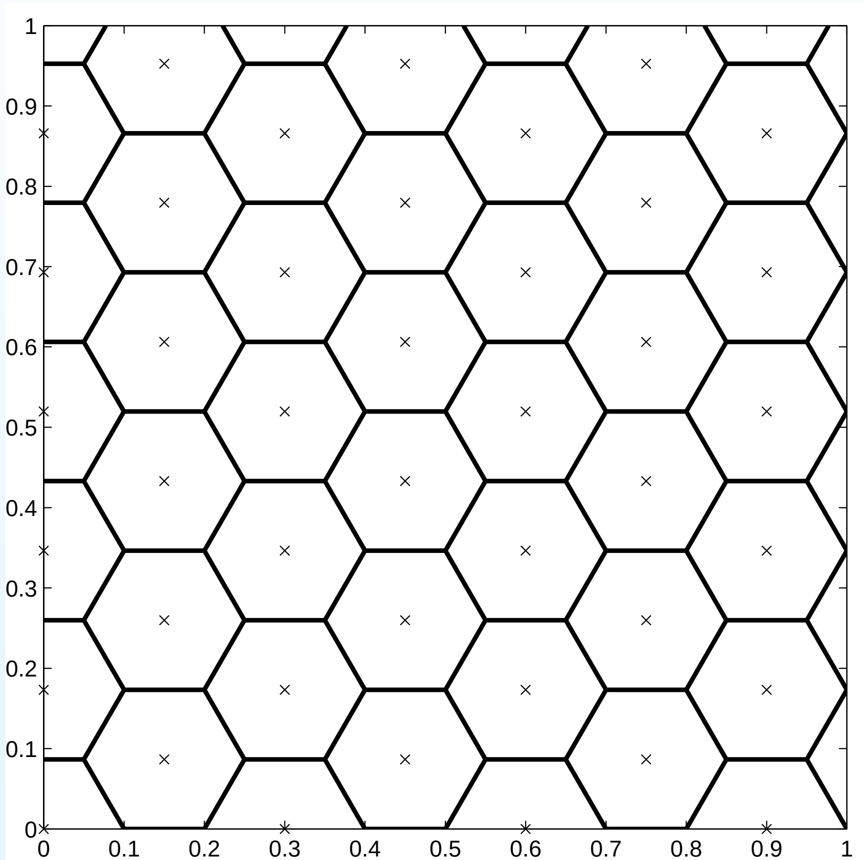


Comparaţie între cuantizarea vectorială şi cea scalară

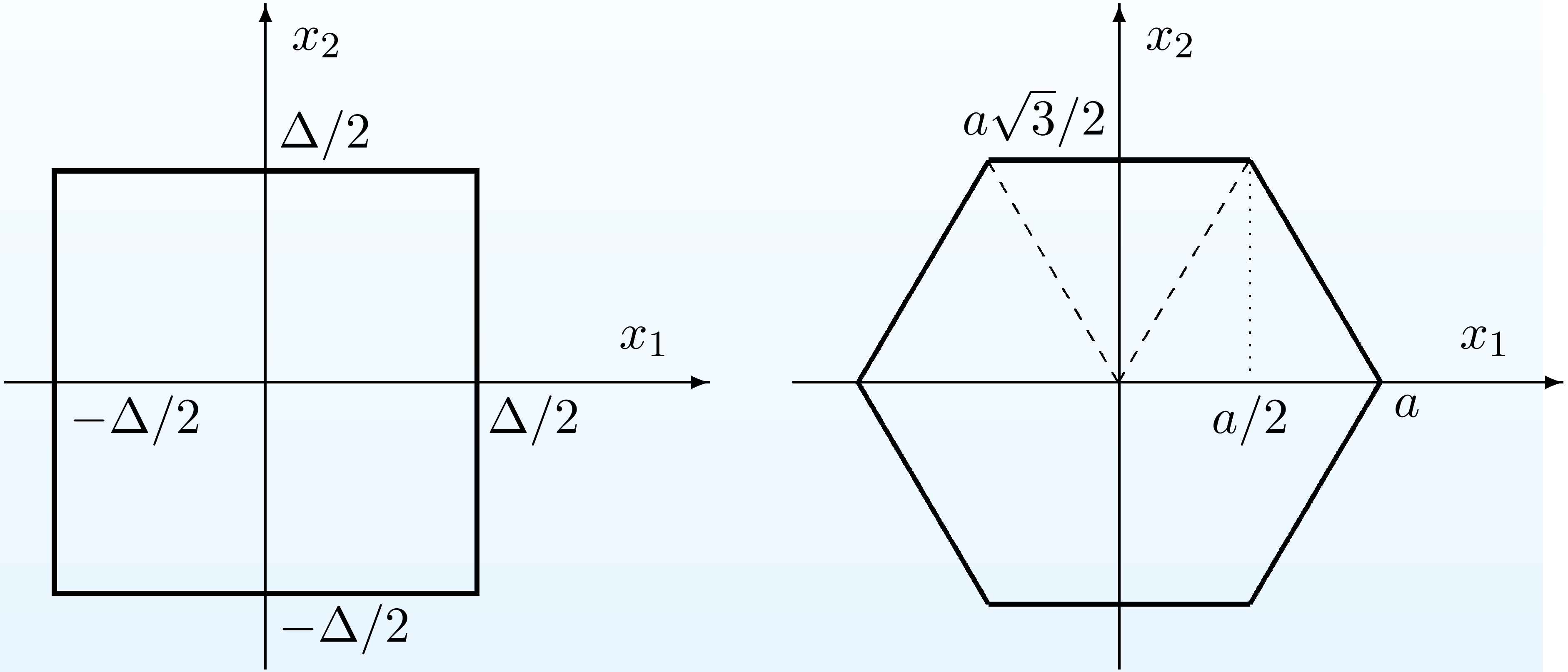
- Cuantizarea vectorială permite obţinerea unor distorsiuni mai mici decât cea scalară, la rezoluţii egale
- Ilustrăm această afirmaţie în cazul $n = 2$, pentru cazul simplu în care semnalul de intrare este uniform distribuit
- Comparăm două cuantizoare
  - cuantizor uniform 2D
  - cuantizor cu celule hexagonale

Două cuantizoare 2D





Celule Voronoi pentru cuantizoare 2D



Cuantizorul uniform 2D (1)

- Cuantizorul scalar uniform este optim
- Cuantizând câte două valori simultan (dar independent) cu acest cuantizor, obţinem un cuantizor 2D
- Celulele Voronoi sunt pătrate
- Notăm cu Δ distanţa dintre două coduri, care este şi latura celulei Voronoi
- Presupunem că toate celulele, inclusiv cele de la margine, au aceeaşi formă
- Deoarece fiecare celulă are arie Δ^2, rezultă că $p(x) = 1/(N\Delta^2)$

Cuantizorul uniform 2D (2)

- Forma identică a celulelor permite limitarea studiului la o singură celulă, cea din jurului codului $c_k = 0$
- Distorsiunea medie este

$$
\begin{aligned}
D_{uni} &= N \int_{\mathcal{A}_k} (x - c_k)^2 \frac{1}{N\Delta^2} dx \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{\Delta^2}{6}
\end{aligned}
$$

- Valoarea de două ori mai mare decât cea a cuantizorului uniform scalar se explică prin lipsa normalizării cu n a distorsiunii

Cuantizorul cu celule hexagonale

- Considerăm o celulă Voronoi cu latura a (egală cu raza cercului circumscris)
- Aria acestei celule este $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
- Densitatea de probabilitate uniformă are valoarea $p(x) = 1/(NA)$
- Presupunând celula centrată în origine, putem calcula distorsiunea pe cele 6 triunghiuri echilaterale formate de două raze (ale cercului circumscris) şi o latură
- Distorsiunea medie este

$$D_{hex} = 6N \int_0^{a\sqrt{3}/2} \int_{-x_2/\sqrt{3}}^{x_2/\sqrt{3}} (x_1^2 + x_2^2) \frac{1}{NA} dx_1 dx_2 = \frac{5a^2}{12}$$

Comparaţie

- Pentru a compara distorsiunile cuantizoarelor hexagonal şi uniform, este necesar ca ariile celulelor Voronoi să fie egale, i.e.

$$\Delta^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

- Raportul distorsiunilor este

$$\frac{D_{hex}}{D_{uni}} = \frac{\frac{5a^2}{12}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2\cdot 6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = 0.9623$$

- Cuantizorul hexagonal oferă un câştig de aproape 4% în distorsiune
- În 2D, cuantizorul hexagonal este optim !
- Pentru n mai mare, cuantizarea vectorială oferă îmbunătăţiri mai mari

Implementarea unui cuantizor vectorial

- Implementarea unui cuantizor vectorial este mai dificilă decât cea a unuia scalar
- Dihotomia nu mai este posibilă şi, pentru un dicţionar oarecare, doar căutarea exhaustivă poate produce codul cel mai apropiat de intrarea $x \in \mathbb{R}^n$
- Dacă însă dicţionarul are o structură regulată, precum în cazul celulelor hexagonale, atunci se pot concepe algoritmi eficienţi de căutare
- În general, cuantizoarele vectoriale utilizate în practică folosesc o structură a codurilor care le face neoptimale, dar (relativ) uşor de utilizat

Celule Voronoi optime pentru coduri date

- Presupunând că dicţionarul este cunoscut, distorsiunea este minimizată dacă, pentru $x \in \mathbb{R}^n$ dat, valoarea $q(x)$ este codul cel mai apropiat de x
- Celula Voronoi optimă asociată codului c_k este

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c_k\| \leq \|x - c_i\|,\ i = 1 : N\}$$

- Celulele Voronoi optime au formă poliedrală
- Dacă $\mathcal{A}_k$ şi $\mathcal{A}_i$ sunt celule vecine, atunci graniţa dintre ele este hiperplanul ortogonal pe mijlocul segmentului ce uneşte codurile c_k şi c_i
- Celulele Voronoi sunt evident convexe

Coduri optime pentru celule Voronoi date

- Presupunem acum că celulele Voronoi sunt cunoscute şi vrem să determinăm codurile optime corespunzătoare
- Similar cu cazul scalar, codul optim asociat celulei $\mathcal{A}_k$ este centrul de masă (centroidul) celulei respective, i.e.

$$c_k = \frac{1}{\text{vol } \mathcal{A}_k} \int_{\mathcal{A}_k} x p(x) dx = E\{x \mid x \in \mathcal{A}_k\}$$

Algoritmul Lloyd generalizat—date empirice

0. Se dau M eşantioane ale semnalului de intrare, x_ℓ, $\ell = 1 : M$. Se alege un dicţionar iniţial $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_N\}$
1. Se stabilesc celulele Voronoi discrete

$$\mathcal{A}_k = \{x_\ell \in \mathcal{X},\ \ell = 1 : M \mid |\ \|x_\ell - c_k\| \le \|x_\ell - c_i\|,\ i = 1 : N, i \ne k\}$$

2. Se recalculează codurile c_k, $k = 1 : N$, ca fiind centrele de masă ale celulelor Voronoi

$$c_k = \frac{1}{|\mathcal{A}_k|} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} x_\ell$$

3. Se repetă paşii 1 şi 2 până când distorsiunea nu mai scade

$$D = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} \sum_{x_\ell \in \mathcal{A}_k} \|x_\ell - c_k\|^2$$

Comentarii

- Algoritmul converge, dar şansa de a se termina într-un minim local este mult mai mare decât în cazul scalar
- Pentru evitarea acestei situaţii se folosesc diverse stratageme
- Algoritmul Linde-Buzo-Gray: se porneşte cu un număr mic de coduri, iar celulele Voronoi cu multe elemente sunt "sparte" în două pe măsură ce iteraţiile avansează