Laboratorul 1

Semnale discrete

1.1 Tema

Însuşirea modului de lucru cu semnale în Matlab. Studiul operaţiilor cu semnale. Proprietăţi ale semnalelor deterministe şi aleatoare.

1.2 Semnale utilizate

Majoritatea semnalelor vor fi generate în Matlab, după cum se explică mai jos. Semnale vocale sau audio pot fi găsite în fişierele descrise în tabelul de mai jos.

Nume fişier	Conţinut	Frecv. eşantionare
`sunet_a`	semnal vocal, sunetul 'a'	8 kHz
`sunet_i`	semnal vocal, sunetul 'i'	8 kHz
`sunet_s`	semnal vocal, sunetul 's'	8 kHz
`xilo`	semnal audio, xilofon	44.1 kHz

1.3 Suport teoretic

Definiţia 1.1 *Un semnal discret x este o funcţie definită pe mulţimea numerelor întregi, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.*

Eşantionare. Fie $x_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, un semnal analogic. Prin eşantionare (uniformă) cu perioada T_e se obţine semnalul discret

$$x[n] = x_a(nT_e). \tag{1.1}$$

Definiţia 1.2 *Un semnal $x[n]$ este periodic de perioadă N sau $N-$periodic, dacă $x[n] = x[n+kN]$, pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$. În general, numim perioadă a semnalului cel mai mic N pozitiv cu proprietatea de mai sus.*

Suportul unui semnal. Spunem că semnalul $x[n]$ are suport $\mathcal{T} \in \mathbb{Z}$ dacă $x[n] = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{T}$, adică semnalul este nul în afara mulţimii suport. În Matlab se pot utiliza semnale cu suport finit, ca în cazul $\mathcal{T} = 0 : M-1$, unde M este un întreg pozitiv. Aceste semnale se memorează în variabile de tip vector; adoptăm convenţia ca vectorii respectivi să fie de tip linie.

1.3.1 Semnale deterministe

Prezentăm în continuare câteva semnale extrem de folosite.

Impuls unitate:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Treaptă unitate:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \geq 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Semnale sinusoidale. Un semnal sinusoidal discret real, cu frecvenţa ω şi defazajul φ, are forma

$$x[n] = \sin(\omega n + \varphi). \tag{1.4}$$

Atenţie, riguros ar fi să numim ω pulsaţie, dar acesta este un abuz comun în prelucrarea semnalelor. Un semnal sinusoidal discret *complex* are forma

$$x[n] = \mathrm{e}^{j(\omega n+\varphi)} = \cos(\omega n + \varphi) + j\sin(\omega n + \varphi). \tag{1.5}$$

Semnale exponenţiale:

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Proprietăţi ale semnalelor sinusoidale. Sinusoida discretă (1.4) este periodică doar dacă există un întreg k astfel încât

$$N = \frac{2\pi k}{\omega} \tag{1.7}$$

să fie întreg. În acest caz, perioada este cel mai mic întreg pozitiv N care satisface (1.7). O proprietate esenţială a semnalelor sinusoidale discrete este că semnale cu frecvenţe diferite pot fi identice.

Propoziţia 1.1 *Două sinusoide de forma (1.4), cu frecvenţele ω şi $\omega + 2k\pi$, unde k este un întreg arbitrar, sunt identice.*

Aşadar, doar semnalele sinusoidale cu frecvenţe $\omega \in [-\pi, \pi]$ sunt distincte.

1.3.2 Operaţii cu semnale

Fie $x[n]$, $y[n]$ două semnale. Având în vedere că un semnal este o funcţie, produsul unui semnal cu un scalar, i.e. $\alpha x[n]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sau suma a două semnale, i.e. $x[n] + y[n]$, au definiţii evidente. Alte operaţii de interes în prelucrarea semnalelor sunt următoarele.

Definiţia 1.3 *Convoluţia semnalelor $x[n]$, $y[n]$ este semnalul*

$$x[n] * y[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]. \tag{1.8}$$

Definiţia 1.4 *Modulaţia în timp a semnalelor $x[n]$, $y[n]$ este semnalul $x[n]y[n]$ obţinut prin înmulţirea eşantioanelor corespunzătoare aceluiaşi moment de timp.*

1.3.3 Semnale aleatoare

O *variabilă aleatoare* reală ξ este caracterizată de funcţia de *densitate de probabilitate* $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$, cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)d\xi = 1. \tag{1.9}$$

Probabilitatea ca valoarea variabilei aleatoare să se afle într-un interval precizat $[\xi_1, \xi_2]$ este

$$\text{Prob}(\xi_1 \le \xi \le \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi)d\xi.$$

Speranţa matematică (expectaţia). Fie ξ şi η două variabile aleatoare legate prin relaţia $\eta = f(\xi)$, unde f este o funcţie precizată. Atunci speranţa matematică (expectaţia) a variabilei η este

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)p(\xi)d\xi. \tag{1.10}$$

Aceasta are semnificaţia de medie a valorilor variabilei η peste toate valorile posibile ale variabilei ξ, luând în considerare probabilităţile asociate acestor valori. Operatorul $E\{\cdot\}$ se mai numeşte şi operator de mediere.

Media μ a variabilei aleatoare ξ se obţine punând $\eta = \xi$ în (1.10), adică este definită prin

$$\mu = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p(\xi)d\xi. \tag{1.11}$$

Varianţa σ^2 a variabilei aleatoare ξ este definită prin

$$\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 p(\xi)d\xi. \tag{1.12}$$

Definiţia 1.5 *O variabilă aleatoare cu distribuţie uniformă în intervalul* $[0, 1]$ *are densitatea de probabilitate*

$$p(\xi) = \begin{cases} 1, & \textit{pentru } \xi \in [0, 1], \\ 0, & \textit{altfel.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Definiţia 1.6 *O variabilă aleatoare cu distribuţie gaussiană (sau normală) de medie* μ *şi varianţă* σ^2 *are densitatea de probabilitate*

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1.14}$$

De obicei, această distribuţie este notată $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Graficele densităţilor de probabilitate ale variabilelor uniformă şi gaussiană sunt prezentate în figura 1.1.

Definiţia 1.7 *Un proces aleator* $x[n]$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, este un şir de variabile aleatoare. Un semnal aleator, notat tot* $x[n]$*, este o realizare a procesului aleator, în sensul că, la fiecare moment de timp* n*, se consideră o singură valoare a variabilei aleatoare corespunzătoare.*

Definiţia 1.8 *Un proces aleator* $x[n]$ *este* staţionar *(în sens larg) dacă variabilele aleatoare* $x[n]$ *au aceeaşi medie, i.e.*

$$E\{x[n]\} = \mu, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.15}$$

iar autocorelaţiile

$$E\{x[n]x[n-k]\} = r[k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.16}$$

depind doar de "distanţa" k *între momentele de timp. (Evident, avem* $r[k] = r[-k]$*.)*

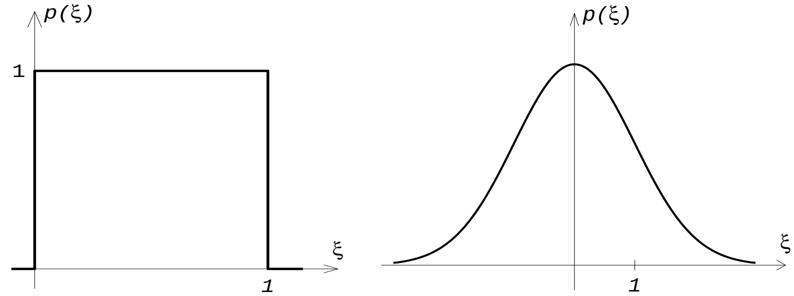

Figura 1.1: Densităţi de probabilitate uniformă (stânga) şi gaussiană $\mathcal{N}(0,1)$ (dreapta).

Autocovarianţele unui proces aleator staţionar sunt autocorelaţiile procesului $x[n]-\mu$, i.e.

$$E\{(x[n]-\mu)(x[n-k]-\mu)\} = \rho[k].$$

Pentru procese cu medie nulă, avem $r[k] = \rho[k]$.

Definiţia 1.9 *Un* zgomot alb *de medie nulă şi varianţă σ^2 este un proces aleator $w[n]$ pentru care*

$$\begin{aligned} E\{w[n]\} &= 0, \\ E\{w[n]w[n-k]\} &= \sigma^2\delta[k]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Estimarea mediei şi a autocorelaţiilor. În aplicaţiile practice, dispunem de o realizare finită a unui proces aleator, adică de un semnal aleator cu suport finit $x[n]$, $n = 0 : M-1$. Media (1.15) se estimează cu

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x[n]. \tag{1.18}$$

Pentru autocorelaţiile (1.16) se folosesc estimaţia nedeviată

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{M-k}\sum_{n=k}^{M-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \le k \le M-1, \tag{1.19}$$

dar mai ales cea deviată

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{M}\sum_{n=k}^{M-1} x[n]x[n-k], \quad 0 \le k \le M-1. \tag{1.20}$$

Pentru $k < 0$, în (1.19) şi (1.20) se ia $\hat{r}[k] = \hat{r}[-k]$.

1.4 Ghid Matlab

1.4.1 Semnale deterministe

Pentru exemplificare vom considera suportul

```
>> n = 0:M-1
```

de lungime M. Semnalele definite mai sus, i.e. impuls unitate (1.2), treaptă unitate (1.3), sinusoidă reală (1.4), exponenţial (1.6) se introduc simplu astfel

```
>> imp_unit = eye(1,M)              % impuls unitate
>> tr_unit  = ones(1,M)             % treapta unitate
>> sin_real = sin(w*n + phi)        % sinusoida reala
>> j = sqrt(-1)
>> sin_compl = exp( j*(w*n + phi))  % sinusoida complexa
>> e = ones(1,M)
>> e(2:end) = alfa
>> e = cumprod(e)                   % semnal exponential
```

Desigur, înainte de executarea instrucţiunile de mai sus, variabilele `w`, `phi`, `alfa` trebuie să primească valori numerice adecvate. Graficul unui semnal real se poate face cu funcţia `plot`; tipică pentru semnale discrete este însă funcţia `stem`, apelată e.g. astfel

```
>> stem(n, sin_real)
```

Pentru a ilustra operaţiile cu semnale, considerăm că `x1` şi `x2` conţin două semnale cu acelaşi suport. Atunci, suma lor se scrie

```
>> xs = x1 + x2
```

modulaţia în timp (produsul la nivel de element) este

```
>> xm = x1 .* x2
```

iar convoluţia lor este

```
>> xc = conv(x1,x2)
```

Atenţie, semnalul `xc` obţinut prin convoluţie are alt suport decât `x1` şi `x2`; de exemplu, dacă `x1` şi `x2` au suport $0 : M - 1$, atunci `xc` are suport $0 : 2M - 2$.

1.4.2 Semnale aleatoare

Matlab posedă generatoare de numere (aproximativ) aleatoare. Un semnal aleator cu distribuţie uniformă în intervalul $[0, 1]$, de lungime `M`, se poate genera cu

```
>> x = rand(1,M)
```

Un semnal aleator cu distribuţie gaussiană de medie nulă şi varianţă egală cu 1 se poate genera cu

```
>> x = randn(1,M)
```

Media (1.18) a unui semnal aleator se calculează cu

```
>> mean(x)
```

Autocorelaţiile nedeviate (1.19) se calculează cu

```
>> r = xcorr(x, 'unbiased')
```

iar cele deviate (1.20) cu

```
>> r = xcorr(x, 'biased')
```

În ambele cazuri, vectorul de autocorelaţii `r` are lungimea `2M`-1; de altfel, aceasta este lungimea maximă permisă de suportul finit al semnalului, după cum se vede din (1.19) şi (1.20).

Autocovarianţele se estimează cu funcţia `xcov`. Atenţie, în această funcţie nu se foloseşte media exactă a procesului (care este necunoscută), ci estimaţia ei (1.18).

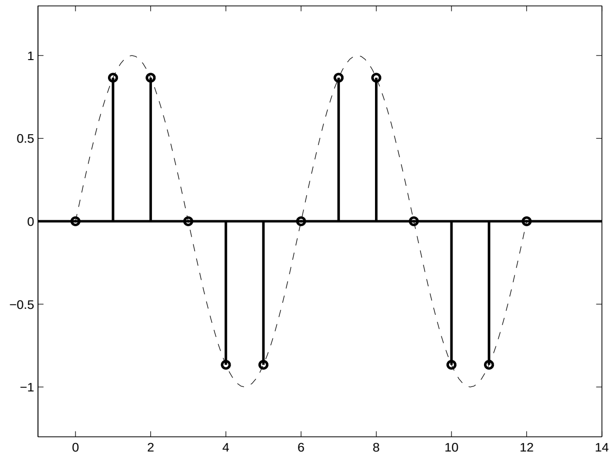

Figura 1.2: Semnalul $\sin(\pi n/3)$, de perioadă 6. Punctat, sinusoida continuă $\sin(\pi t/3)$.

1.4.3 Sunete

Pentru a asculta un sunet, acesta trebuie salvat cu funcţia `auwrite`. De exemplu, semnalul `xilo`, aflat în variabila `yx`, se salvează cu

```
>> auwrite(yx, 44100, 16, 'linear', 'numefisier.au')
```

Frecvenţa de eşantionare este o informaţie esenţială. Modificarea ei produce alterarea semnalului audio. Ascultaţi în căşti (dacă vor fi disponibile) semnalul audio selectând fişierul '.au' în Windows Explorer şi acţionând butonul "play" din meniul asociat. Citirea unui fişier '.au' într-o variabilă Matlab se face cu funcţia `auread`.

Fişiere în format "wave" se pot manipula cu funcţiile `wavwrite` şi `wavread`.

1.5 Sarcini de lucru

Tema 1.1 ("Acomodare")

Executaţi comenzile Matlab descrise în secţiunea "Ghid Matlab" şi desenaţi graficele semnalelor prezentate în partea teoretică a lucrării.

Tema 1.2 (Eşantionare)

a. Încărcaţi cu comanda `load` fişierele audio descrise la începutul lucrării. Care este durata reală a fiecărui semnal ? (Ţineţi seama de frecvenţa de eşantionare cu care au fost obţinute semnalele.)

b. Scrieţi o funcţie Matlab care calculează semnalul obţinut prin eşantionarea cu relaţia (1.1) a sinusoidei continue $x_a(t) = \sin(\Omega t)$. Argumentele de intrare sunt pulsaţia Ω a sinusoidei continue (frecvenţa fiind $\Omega/2\pi$), perioada de eşantionare T_e (sau frecvenţa de eşantionare $f_e = 1/T_e$) şi lungimea M a suportului semnalului discretizat. Argumentul de ieşire este un vector x de lungime M conţinând eşantioanele sinusoidei discrete pe suportul $0 : M-1$.

c. Scrieţi o funcţie Matlab care desenează pe acelaşi grafic sinusoida continuă $x_a(t) = \sin(\Omega t)$ şi pe cea discretizată $x[n] = \sin(\Omega n T_e)$, pentru un suport precizat (de exemplu $0 : M-1$). Un exemplu de grafic este prezentat în figura 1.2, unde, e.g. $\Omega = \pi/3$ şi $T_e = 1$, iar suportul este $0 : 12$.

Tema 1.3 (Sinusoide discrete)

Folosind funcţiile realizate, desenaţi graficele următoarelor sinusoide discrete, împreună cu sinusoidele continue din care sunt obţinute. Luaţi $T_e = 1$ pentru comoditate, caz în care $\Omega = \omega$.

a. Sinusoida discretă periodică cu frecvenţa $\omega = \pi/5$. Care este perioada acesteia ? Observaţi că în (1.7) avem $k = 1$.

b. Sinusoida discretă periodică cu frecvenţa $\omega = 3\pi/5$. Care este perioada acesteia ? Observaţi că în (1.7) avem $k = 3$. Deduceţi că numărul k reprezintă numărul de perioade ale semnalului sinusoidal continuu $x(t) = \sin(\omega t)$ care corespund unei perioade a semnalului discret $x[n] = \sin(\omega n)$. Alegeţi frecvenţe ω astfel încât să obţineţi şi alte valori ale lui k.

c. O sinusoidă discretă aperiodică, de exemplu luând $\omega = 1$.

d. Două sinusoide discrete identice, dar cu frecvenţe diferite (care provin din eşantionarea unor sinusoide continue diferite). Luaţi de exemplu $\omega_1 = \pi/3$ şi $\omega_2 = 2\pi + \pi/3$. Observaţi diferenţa dintre sinusoidele continue.

Tema 1.4 (Ce ne arată autocorelaţiile)

a. Verificaţi că generatorul de numere aleatoare `randn` produce într-adevăr zgomot alb de medie nulă şi varianţă 1. Pentru aceasta, generaţi cu `randn` un semnal pseudoaleator x de lungime M. Cu ajutorul funcţiei `mean`, calculaţi media semnalului. Cu ajutorul funcţiei `xcorr`, calculaţi primele $L < M$ autocorelaţii $r[k]$. Apelul

```
>> r = xcorr(x, L, 'biased')
```

produce secvenţa $r[k]$, $k = -L : L$; aşadar, $r[0]$ se află în poziţia `L+1` în vectorul `r`. Desenaţi graficul secvenţei de autocorelaţii şi interpretaţi rezultatul.

Ţinând L fix, măriţi M şi constataţi că mai multe eşantioane ale unui semnal aleator dau o imagine mai bună a caracteristicilor procesului aleator care generează semnalul.

b. Generaţi un semnal sinusoidal cu suport $0 : M - 1$, astfel încât acesta să conţină mai multe perioade ale sinusoidei (minimum 5). Calculaţi autocorelaţiile $r[k]$ ale acestui semnal. Observaţi care sunt valorile k pentru care $r[k]$ este un maxim sau un minim local. Care este legătura cu perioada sinusoidei ? Explicaţi.

c. Semnalul `xilo` este aproape periodic în partea lui finală. Extrageţi eşantioanele de la 8000 la 10000 şi calculaţi autocorelaţiile acestui subsemnal. Observaţi din nou legătura între "perioada" semnalului şi maximele secvenţei de autocorelaţii.

Faceţi acelaşi lucru pentru semnalele vocale. Observaţi forma cvasi-periodică a vocalelor şi forma aproape de zgomot alb a sunetului 's'.

Tema 1.5 (Supliment: este `randn` un semnal gaussian ?)

Considerând că valorile furnizate de funcţia `randn` sunt realizări ale unei variabile aleatoare cu distribuţie gaussiană, ne punem problema să verificăm dacă distribuţia "experimentală" a valorilor coincide cu (1.14). Pentru aceasta, generaţi cu `randn` un vector suficient de lung şi "desenaţi" distribuţia sa cu ajutorul funcţiei `hist`. Suprapuneţi peste distribuţia experimentală graficul densităţii de probabilitate (1.14). (Atenţie, aceasta va trebui înmulţită cu numărul de valori din vector, pentru a avea aceeaşi scară.)