Laboratorul 2

Transformata Fourier

2.1 Tema

Utilizarea transformatei Fourier a semnalelor discrete. Studierea spectrelor unor semnale generate artificial sau naturale şi extragerea unor informaţii referitoare la proprietăţile semnalelor respective.

2.2 Semnale utilizate

În afară de semnalele utilizate în Laboratorul nr.1, vom mai folosi următoarele semnale:

Nume fişier	Conţinut	Frecv. "eşantionare"
`lynx.m`	număr de râşi vânaţi	1 an
`sunspot.dat`	număr pete solare	1 an

Fişierul `lynx.m` conţine date reprezentând numărul de râşi prinşi anual în capcane pe fluviul MacKenzie din Canada, în perioada 1821–1934.

Fişierul `sunspot.dat` (care va fi încărcat cu comanda `load sunspot.dat`) conţine numărul anual de pete solare în perioada 1700–1987. Variabila `sunspot` este o matrice cu două coloane. Prima reprezintă anul, a doua numărul de pete solare înregistrate in anul respectiv.

Astfel de semnale, a căror natură este în mod implicit discretă (i.e. nu provin din eşantionarea unui semnal analogic), se mai numesc şi *serii de timp*.

2.3 Suport teoretic

Definiţia 2.1 *Transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$ este funcţia $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită de*

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{2.1}$$

Notăm pe scurt $X(\omega) = TF(x[n])$. De asemenea, vom folosi şi notaţia $X(e^{j\omega})$ cu aceeaşi semnificaţie ca $X(\omega)$.

Observaţia 2.1 Transformata Fourier $X(\omega)$ este periodică cu perioada 2π şi de aceea este suficient să studiem transformata Fourier a unui semnal doar în intervalul $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Observaţia 2.2 Nu orice semnal $x[n]$ are o transformată Fourier definită pe întreg intervalul $[-\pi, \pi]$, deoarece seria (2.1) poate fi divergentă. O condiţie suficientă de convergenţă este următoarea.

Propoziţia 2.1 *Dacă semnalul $x[n]$ este absolut sumabil, atunci $X(\omega)$ din (2.1) există pentru orice ω. (Mai mult, seria (2.1) converge uniform către o funcţie continuă în ω.)*

Propoziţia 2.2 *Dacă $x[n]$ este un semnal de energie finită, atunci seria (2.1) converge (i.e. transformata Fourier există) aproape peste tot. Mai precis, fie*

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n}. \tag{2.2}$$

Atunci avem

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0, \tag{2.3}$$

adică "energia" erorii de aproximare a lui $X(\omega)$ prin $X_M(\omega)$ tinde spre zero, dar eroarea nu se anulează neapărat peste tot.

Teorema 2.1 *Transformata Fourier inversă, care asociază unei funcţii $X(\omega)$ semnalul $x[n]$ (a cărui transformată Fourier este $X(\omega)$) este*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \tag{2.4}$$

Forma transformatei Fourier inversă (2.4) sugerează semnificaţia transformatei Fourier a unui semnal: $X(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, reprezintă conţinutul în frecvenţă al semnalului $x[n]$. Funcţia complexă $X(\omega)$ este numită *spectrul* semnalului $x[n]$; desigur, $|X(\omega)|$ este amplitudinea (magnitudinea) spectrului, iar $\arg X(\omega)$ este faza spectrului. De asemenea, $|X(\omega)|^2$ este numită *densitate de energie spectrală.*

Simetrii ale TF pentru semnale reale. Dacă semnalul $x[n]$ este real, atunci au loc următoarele proprietăţi de simetrie:

$$\begin{array}{l} X(-\omega) = X^*(\omega), \\ \mathrm{Re}X(\omega) = \mathrm{Re}X(-\omega), \\ \mathrm{Im}X(\omega) = -\mathrm{Im}X(-\omega), \\ |X(\omega)| = |X(-\omega)|, \\ \arg X(\omega) = -\arg X(-\omega). \end{array} \tag{2.5}$$

Cu alte cuvinte, $|X(\omega)|$ şi $\mathrm{Re}X(\omega)$ sunt funcţii pare, iar $\mathrm{Im}X(\omega)$ şi $\arg X(\omega)$ sunt funcţii impare.

Teorema lui Parseval.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega. \tag{2.6}$$

Aşadar, energia în timp a semnalului este egală (modulo constanta $1/2\pi$) cu energia în frecvenţă a acestuia. Termenul din dreapta justifică denumirea de densitate de energie spectrală atribuită lui $|X(\omega)|^2$.

Transformata Fourier a semnalelor sinusoidale complexe. Semnalul sinusoidal complex $x[n] = \mathrm{e}^{j\omega_0 n}$, unde $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ este dat, nu are energie finită şi seria (2.1) nu este convergentă. Totuşi, putem asocia o transformată Fourier acestui semnal, anume

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi\ell + \omega - \omega_0). \tag{2.7}$$

Notăm $\delta(\omega)$ impulsul Dirac situat în origine. Observăm că $X(\omega)$ este periodică şi că restricţia la intervalul $[-\pi, \pi]$ este impulsul $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

Interpretare: semnalul sinusoidal are un spectru nenul într-o singură frecvenţă (în care se concentrează toată energie sa). Un spectru de acest tip se numeşte şi spectru de linii (una singură, în cazul de faţă).

Densitatea de putere spectrală $P(\omega)$ a unui proces aleator $x[n]$ se poate defini în două moduri. Într-o primă variantă, $P(\omega)$ se defineşte ca transformata Fourier a secvenţei de autocorelaţii

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k] \mathrm{e}^{-j\omega k}. \tag{2.8}$$

O definiţie echivalentă se obţine aplicând relaţia generală ”putere = energie/timp” şi ţinând seama de definiţia densităţii de energie spectrală:

$$P(\omega) = \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{N} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \right|^2 \right\}. \tag{2.9}$$

Practic, pentru semnale cu suport finit, e.g. $0 : M-1$, densitatea de putere spectrală se poate estima prin trunchieri ale formulelor de mai sus la suportul disponibil. În particular, din (2.9) se obţine estimarea (numită periodogramă)

$$\hat{P}(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{M} |X(\omega)|^2, \tag{2.10}$$

unde $X(\omega)$ este transformata Fourier a semnalului $x[n]$ cu suport $0 : M-1$. Aşadar, şi în cazul semnalelor aleatoare, transformata Fourier oferă informaţii semnificative despre conţinutul în frecvenţă al semnalelor.

2.4 Ghid Matlab

Luând o grilă de frecvenţe

```
>> w = 0:pas:pi
```

unde, e.g. `pas=0.01`, transformata Fourier a semnalului `x` cu suportul

```
>> n = 0:M-1
```

se poate calcula prin

```
>> X = x * exp(-j*n'*w)
```

Amplitudinea transformatei Fourier se desenează cu

```
>> plot(w, abs(X))
```

iar faza prin

```
>> plot(w, angle(X))
```

O altă variantă de calcul presupune utilizarea funcţiei `freqz`, care va fi discutată într-o lucrare ulterioară. Transformata Fourier a semnalului `x` se calculează pe grila de frecvenţe `w` prin apelul

```
>> X = freqz(x, 1, w)
```

De asemenea, transformata Fourier se poate calcula eficient (pe o anumită grilă de frecvenţe), cu funcţia `fft`. Aceasta va fi discutată după prezentarea transformatei Fourier discrete şi a algoritmilor rapizi de implementare a acesteia.

2.5 Sarcini de lucru

Tema 2.1 (TF a unei sinusoide complexe cu suport finit)

Fie $x[n] = \mathrm{e}^{j\omega_0 n}$ o sinusoidă complexă de frecvenţă precizată, cu suport $0 : M-1$. (Pentru teste, alegeţi de exemplu $\omega_0 = \pi/8$ şi M suficient de mare pentru ca suportul să conţină cel puţin 5 perioade ale sinusoidei.)

a. Verificaţi calculul de mai jos al transformatei Fourier a semnalului.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} \mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)M} - 1}{\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)M/2}}{\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)/2}} \cdot \frac{\sin((\omega_0-\omega)M/2)}{\sin((\omega_0-\omega)/2)} \end{aligned}$$

Observaţi că

$$|X(\omega)| = \left| \frac{\sin((\omega_0-\omega)M/2)}{\sin((\omega_0-\omega)/2)} \right|$$

şi că valoarea maximă se obţine pentru $\omega = \omega_0$ şi este

$$|X(\omega_0)| = M.$$

b. Desenaţi graficul modulului transformatei Fourier, calculând $X(\omega)$ cu ajutorul funcţiei `freqz`, pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, \pi]$. Observaţi că graficul are un vârf pronunţat pentru $\omega = \omega_0$. (Spectrul nu conţine doar o linie, cum spune relaţia (2.7), deoarece sinusoida are lungime finită.)

Se verifică grafic afirmaţia $|X(\omega_0)| = M$? Dacă nu, de ce ?

Tema 2.2 (TF a unei sinusoide reale cu suport finit)

Consideraţi acum semnalul $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$, ω_0 ales ca mai sus şi $\varphi \in [0, 2\pi]$. Suportul este tot $0 : M-1$.

a. Desenaţi graficul modulului transformatei Fourier a semnalului, pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, \pi]$. Observaţi că graficul $|X(\omega)|$ este simetric faţă de axa verticală, aşa cum spun relaţiile (2.5).

b. Justificaţi forma graficului ţinând seama că $\cos\alpha = (\mathrm{e}^{j\alpha} + \mathrm{e}^{-j\alpha})/2$.

c. Alegeţi mai multe valori ale lui φ şi observaţi ce se schimbă în graficul $|X(\omega)|$. De ce ?

Tema 2.3 (TF a unei sume de sinusoide)

Consideraţi suma a două sinusoide reale $x[n] = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$, cu $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$. Alegeţi ω_1 suficient de departe de ω_2, de exemplu $\omega_1 = \pi/8$, $\omega_2 = \pi/3$. Suportul este tot $0 : M-1$.

a. Desenaţi graficul semnalului $x[n]$. Care este perioada acestuia ? Luaţi M suficient de mare astfel încât să aveţi cel puţin cinci perioade în suportul $0 : M-1$.

b. Desenaţi graficul modulului transformatei Fourier a semnalului, pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, \pi]$. Aţi obţinut desenul pe care îl aşteptaţi ?

c. Luaţi un semnal care este suma a două sinusoide de amplitudini diferite şi repetaţi operaţiile de mai sus.

d. Alegeţi frecvenţele sinusoidelor foarte aproape una de alta, de exemplu astfel încât diferenţa lor să fie $\omega_1 - \omega_2 = 0.01$. Repetaţi operaţiile de mai sus şi explicaţi-vă fenomenele.

Tema 2.4 (TF şi detectarea periodicităţii unui semnal)

Din exemplele de mai sus aţi observat că TF are valori mari în frecvenţele corespunzătoare componentelor sinusoidale ale unui semnal. Aşadar, TF poate fi utilizată pentru analiza semnalelor (cvasi-)periodice.

a. Fişierul `sunspot.dat` conţine numărul de pete solare înregistrate anual timp de aproape 300 de ani. După cum probabil ştiţi, activitatea solară pare a avea un ciclu de aproximativ 11 ani. Desenaţi graficul numărului de pete solare, apoi calculaţi TF a acestuia şi găsiţi frecvenţa corespunzătoare celui mai înalt vârf al ei (excluzând $\omega = 0$, care dă componenta continuă). Calculaţi perioada corespunzătoare acestei frecvenţe ($T = 2\pi/\omega$) şi vedeţi dacă este într-adevăr 11. Repetaţi aceste operaţii pentru durate mai scurte, de 50-100 de ani.

b. Repetaţi aceleaşi operaţii pentru datele din fişierul `lynx.m`. Relaţia pradă-prădător (aici râsul e prada) e caracterizată de periodicitate (în pescuitul oceanic se petrec fenomene asemănătoare). Perioada oscilaţiilor este însă specifică fiecărui ecosistem. (Întrebare suplimentară: în ce ocean se varsă fluviul MacKenzie ?)

c. Semnalul `xilo` este aproape periodic în partea lui finală. Extrageţi eşantioanele de la 8000 la 10000 şi repetaţi operaţiile de mai sus. (Dacă aveţi ureche perfectă puteţi confirma rezultatul.) Observaţi armonicele.

Tema 2.5 (Zgomot alb) Un zgomot alb este un proces aleator ale cărui autocorelaţii sunt $r[k] = \sigma^2\delta[k]$, unde σ^2 este puterea zgomotului. Din definiţia (2.8) rezultă că densitatea de putere spectrală a zgomotului alb este $P(\omega) = \sigma^2$, i.e. constantă.

Generaţi cu funcţia `randn` un pseudo-zgomot alb de lungime M (de ordinul sutelor) şi calculaţi $P(\omega)$ cu formula (2.10). Graficul densităţii de putere spectrală are un aspect tipic, care nu se modifică mărind M. Totuşi, se poate observa, mai ales repetând operaţia pentru alte realizări ale zgomotului, că nici o frecvenţă nu e favorizată. (Comentariu: cele de mai sus nu pun în discuţie corectitudinea formulei $P(\omega) = \sigma^2$, nici calitatea generatorului `randn`. Explicaţia fundamentală este proasta calitate a periodogramei (2.10) ca estimator al densităţii de putere spectrală.)

Tema 2.6 (Sinusoidă în zgomot alb)

Consideraţi procesul $x[n] = \cos(\omega_0 n) + w[n]$, unde $w[n]$ este zgomot alb generat cu `randn`. Suportul este $0 : M - 1$.

Dându-se un astfel de semnal (realizare a procesului), ne propunem să găsim frecvenţa ω_0 a sinusoidei. (Evident, se presupune că, în acest semnal, sinusoida este purtătoarea de informaţie, iar zgomotul o alterează.)

a. Generaţi o realizare a semnalului pentru M de ordinul sutelor. Desenaţi graficul (în timp) al semnalului şi observaţi că este greu de estimat o periodicitate a semnalului. Deci, acest grafic oferă puţină informaţie referitoare la ω_0.

b. Calculaţi densitatea de putere spectrală cu (2.10) şi trasaţi graficul acesteia. Observaţi maximul din ω_0. (Deoarece TF este o transformare liniară, spectrul semnalului "sinusoidă în zgomot alb" este suma TF ale celor două semnale componente; aşadar, trebuie într-adevăr să existe un maxim în ω_0.)

c. Modificaţi semnalul în $x[n] = \cos(\omega_0 n) + aw[n]$, unde a este o constantă. Alegeţi mai multe valori pentru a şi repetaţi operaţiile de mai sus. Care ar fi valoarea maximă a constantei a pentru care puteţi aprecia corect ω_0 ? (Această valoare maximă poate fi justificată cu mijloace de statistică matematică de nivel superior cunoştinţelor predate la cursul de prelucrarea semnalelor.)

Tema 2.7 (Supliment: efectul Gibbs)

Efectul Gibbs este studiat în problema **PR1.2.4** din curs. Citiţi de acolo descrierea fenomenului, scrieţi programul aferent şi executaţi-l.