Laboratorul 3

Reprezentarea în frecvenţă a sistemelor liniare invariante în timp

3.1 Tema

Reprezentare grafică a răspunsului în frecvenţă al sistemelor discrete. Studiul sistemelor cu unul sau două zerouri (sau poli). Interpretarea răspunsului în frecvenţă al unui sistem.

3.2 Suport teoretic

Propoziţia 3.1 *Considerăm un sistem LIT stabil, al cărui răspuns la impuls este* $h[n]$. *Fie* $H(z)$ *funcţia sa de transfer şi*

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{3.1}$$

transformata Fourier a răspunsului la impuls. Dacă la intrarea sistemului se aplică semnalul sinusoidal complex $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, *atunci ieşirea este semnalul sinusoidal*

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \arg H(e^{j\omega_0}))}. \tag{3.2}$$

Relaţia (3.2) spune că răspunsul unui sistem LIT la intrare sinusoidală de frecvenţă ω_0 (de amplitudine 1 şi fază nulă) este tot o sinusoidă, cu aceeaşi frecvenţă, a cărei amplitudine şi fază depind de valoarea, la frecvenţa ω_0, a transformatei Fourier (3.1) a răspunsului la impuls $h[n]$. Mai precis, amplitudinea ieşirii este $|H(\mathrm{e}^{j\omega_0})|$, iar faza $\arg H(\mathrm{e}^{j\omega_0})$.

Mai mult, dacă intrarea $x[n]$ este un semnal oarecare, a cărui transformată Fourier $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ există, atunci ieşirea are transformata Fourier $Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = H(\mathrm{e}^{j\omega})X(\mathrm{e}^{j\omega})$. Aşadar, spectrul semnalului de ieşire este, la fiecare frecvenţă ω, produsul dintre valoarea spectrului intrării la frecvenţa ω şi $H(\mathrm{e}^{j\omega})$.

Denumirea de *filtru* ca sinonim pentru *sistem*, utilizată în prelucrarea semnalelor, provine din proprietatea sistemelor de a modifica spectrul semnalelor de intrare, de a trata în mod diferit semnale de frecvenţe diferite, pe scurt de a filtra semnale.

Definiţia 3.1 *Transformata Fourier (3.1) a răspunsului la impuls a unui sistem se numeşte* răspuns în frecvenţă *al sistemului. De asemenea, în special pentru reprezentarea grafică a răspunsului în frecvenţă, se foloseşte denumirea de* caracteristică de frecvenţă *a sistemului.*

Dacă $H(z)$ are coeficienţi reali, se reprezintă amplitudinea $|H(e^{j\omega})|$ şi faza $\arg H(e^{j\omega})$ pentru $\omega \in [0, \pi]$; pentru $\omega \in [-\pi, 0]$ se ţine seama de simetria TF (amplitudinea este pară, iar faza impară). În cazul funcţiilor de transfer cu coeficienţi complecşi se ia $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Amplitudinea se măsoară deseori în decibeli (dB), caz în care se reprezintă grafic funcţia $|H(e^{j\omega})|_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$. Amplitudinea $|H(e^{j\omega})|_{\mathrm{dB}}$ este numită şi amplificare, iar opusul ei, $-|H(e^{j\omega})|_{\mathrm{dB}}$, atenuare.

Deoarece exponenţiala complexă este o funcţie periodică, de perioadă 2π, faza se poate reprezenta doar cu valori în intervalul $[-\pi, \pi]$, prin adunarea sau scăderea în mod adecvat a unor multipli de 2π; se obţine astfel *valoarea principală* a fazei, notată $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$. Aceasta este folosită întotdeauna atunci când faza unui filtru este calculată numeric.

Caracteristica de frecvenţă a filtrelor raţionale

Funcţia de transfer a unui filtru IIR raţional are forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}, \tag{3.3}$$

unde a_n, $n = 0 : N$, şi b_n, $n = 0 : M$, sunt coeficienţii filtrului; polii filtrului sunt d_k, $k = 1 : N$, iar zerourile acestuia sunt c_k, $k = 1 : M$.

Caracteristica de frecvenţă a unui filtru IIR se poate trasa mai uşor atunci când funcţia de transfer se reprezintă în forma poli-zerouri. Această reprezentare are avantajul că poate fi analizată prin studierea caracteristicilor de frecvenţă ale funcţiilor de transfer de grad 1. Mai precis, amplitudinea în decibeli este

$$|H(e^{j\omega})|_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + 20 \sum_{k=1}^{M} \log_{10} |1 - c_k e^{-j\omega}| - 20 \sum_{k=1}^{N} \log_{10} |1 - d_k e^{-j\omega}|, \tag{3.4}$$

iar faza se poate scrie ca

$$\arg|H(e^{j\omega})| = \arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^{M} \arg(1 - c_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^{N} \arg(1 - d_k e^{-j\omega}). \tag{3.5}$$

Se observă deci că în (3.4) şi (3.5) apar sume ale amplitudinilor, respectiv fazelor unor termeni elementari de gradul 1 (dar cu coeficienţi complecşi, în general). Mai mult, singura diferenţă între efectul polilor şi cel al zerourilor este semnul termenilor corespunzători.

Filtrul FIR de ordinul 1 are funcţia de transfer

$$H(z) = 1 - cz^{-1}, \quad c = re^{j\theta}, \quad r \in [0, 1], \; \theta \in [0, \pi]. \tag{3.6}$$

Amplitudinea răspunsului în frecvenţă este dată de

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |1 - re^{j(\theta-\omega)}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta). \tag{3.7}$$

Deoarece răspunsul în frecvenţă al filtrului (3.6) este

$$H(e^{j\omega}) = 1 - r\cos(\omega - \theta) + jr\sin(\omega - \theta),$$

valoarea principală a fazei este

$$\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] = \mathrm{arctg}\left(\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right). \tag{3.8}$$

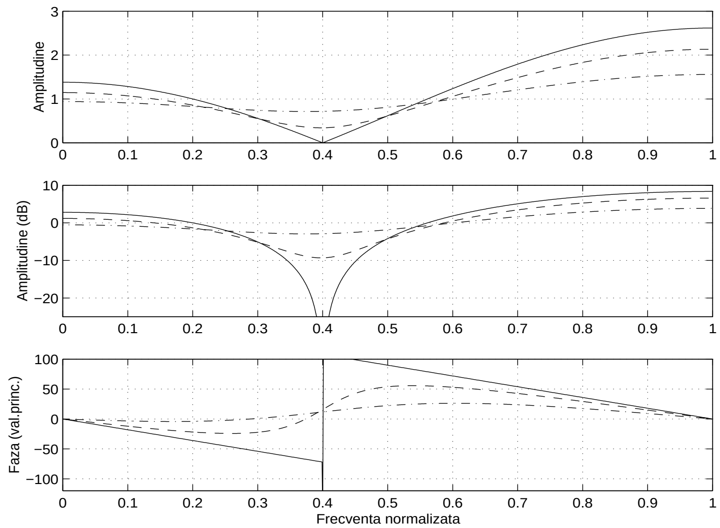

Figura 3.1: Caracteristica de frecvenţă a filtrului (3.9), pentru $\theta = 0.4\pi$, $r = 1$ (linie continuă), $r = 0.8$ (linie întreruptă), $r = 0.5$ (linie-punct).

Filtrul FIR de ordinul 2. În general, funcţiile de transfer ale filtrelor au coeficienţi reali. De aceea este interesant să studiem răspunsul în frecvenţă al unui filtru FIR de ordinul 2, cu zerouri complex conjugate. Zerourile sunt $c = re^{j\theta}$ şi $c^* = re^{-j\theta}$, iar funcţia de transfer este

$$H(z) = (1 - cz^{-1})(1 - c^* z^{-1}) = 1 - 2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}. \tag{3.9}$$

Amplitudinea răspunsului în frecvenţă, în decibeli, se obţine adunând două amplitudini de tipul (3.7), corespunzătoare valorilor θ şi $-\theta$. Similar, faza se obţine adunând fazele corespunzătoare factorilor de grad 1 ai lui (3.9). Prezentăm caracteristica de frecvenţă a filtrului (3.9) în figura 3.1, pentru $\theta = 0.4\pi$. Deoarece coeficienţii filtrului sunt reali, graficul amplitudinii este simetric faţă de $\omega = 0$ şi deci este suficientă desenarea lui pentru intervalul $[0, \pi]$ (normalizat $[0, 1]$).

3.3 Ghid Matlab

Caracteristica de frecvenţă a unui filtru IIR se poate trasa cu ajutorul funcţiei `freqz`. Dacă variabilele `b` şi `a` conţin coeficienţii numărătorului, respectiv numitorului (în ordine descrescătoare a puterilor), atunci

```
>> freqz(b,a)
```

desenează amplitudinea (în dB) şi valoarea principală a fazei (în radiani) în două grafice. De exemplu, filtrul FIR de ordinul doi (3.9) cu $r = 0.8$, $\theta = \pi/3$ se desenează prin

```
>> b = [1 -0.8 0.64]
>> freqz(b,1)
```

Apelul

```
>> [H,w] = freqz(b,a)
```

pune în `H` valorile răspunsului în frecvenţă calculat în elementele grilei de frecvenţe `w` (generată de funcţie). Desenarea e.g. amplitudinii răspunsului se face cu

```
>> plot(w, abs(H))
```

În alte moduri de apel ale funcţiei `freqz` se pot specifica numărul de puncte de pe grilă, se pot preciza explicit frecvenţele în care se calculează răspunsul etc.

Diagrama poli-zerouri a unui filtru IIR se desenează cu apelul

```
>> zplane(b,a)
```

3.4 Sarcini de lucru

Tema 3.1 (Filtre FIR de ordinul 1)

Considerăm filtrele FIR cu funcţia de transfer (3.6) şi parametrii r şi θ.

a. Alegeţi o valoare pentru θ, de exemplu $\theta = \pi/3$. Ţinând această valoare fixată, desenaţi caracteristica de frecvenţă a filtrului pentru diverse valori ale lui r între 0 şi 1. Caracteristica de frecvenţă se va desena pentru $\omega \in [-\pi, \pi]$. Verificaţi cu `zplane` că poziţia zeroului este cea dorită.

Încercaţi să desenaţi într-un stil asemănător celui din figura 3.1, adică

- suprapuneţi mai multe răspunsuri pentru a evidenţia diferenţele dintre ele;
- desenaţi amplitudinea răspunsului atât în decibeli cât şi adimensional.

Observaţi că cu cât r este mai aproape de 1 (i.e. zeroul este mai aproape de cercul unitate), cu atât atenuarea în jurul frecvenţei $\omega = \theta$ este mai mare.

b. Repetaţi operaţiile de mai sus pentru o altă valoare a lui θ.

Tema 3.2 (Filtre FIR de ordinul 2)

Considerăm acum filtrele FIR de ordinul 2, cu funcţia de transfer (3.9) şi parametrii r şi θ.

Repetaţi operaţiile de la tema precedentă pentru acest tip de filtre.

Tema 3.3 (Filtre AR)

Un filtru AR are funcţia de transfer $G(z) = 1/H(z)$, unde $H(z)$ este un filtru FIR. Consideraţi filtre AR de ordinul 2, cu funcţia de transfer

$$G(z) = \frac{1}{(1 - cz^{-1})(1 - c^* z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

a. Repetaţi aceleaşi operaţii ca la temele precedente. Observaţi că graficele amplitudinii (în dB) se obţin prin oglindirea faţă de abscisă a celor obţinute pentru filtrele FIR de ordinul 2.

b. Normaţi filtrul astfel încât $G(0) = 0$dB şi redesenaţi un grafic de amplitudine. Ce se întâmplă ?

Tema 3.4 (Legătura dintre poli, zerouri şi răspunsul în frecvenţă)

a. Alegeţi un filtru stabil cu coeficienţi reali, cu 2-4 poli şi zerouri (numărul de poli poate fi diferit de numărul de zerouri, de exemplu: $N = 2$, $M = 3$). Alegeţi poli şi zerouri relativ aproape de cercul unitate, e.g. cu modul mai mare de 0.7.

Desenaţi diagrama poli-zerouri (cu `zplane`) şi răspunsul în frecvenţă (cu `freqz`). Observaţi aspectul răspunsului în frecvenţă pentru frecvenţele corespunzând argumentelor zerourilor şi polilor.

b. Arătaţi răspunsul în frecvenţă unui coleg şi rugaţi-l să "ghicească" poziţiile polilor şi zerourilor. (De asemenea, pregătiţi-vă să răspundeţi la o întrebare similară. Sugestie: antrenaţi-vă luând aleator polii şi zerourile.)

Tema 3.5 (Supliment: modelul simplu al unui instrument muzical)

Timbrul unui instrument muzical este dat de amplitudinea armonicelor sunetului fundamental emis. De exemplu, dacă sunetul fundamental are frecvenţa ω_0, atunci sunetul (discretizat) emis de instrument are forma (idealizată)

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \sin(k\omega_0 n),$$

unde $\alpha_1 = 1$, valoarea α_k reprezintă contribuţia armonicei k la sunet, iar N este numărul total de armonice emise. De obicei, armonicele au contribuţie mai mică decât fundamentala, adică $\alpha_k < 1$, $k = 2 : N$.

Putem modela primar un instrument printr-un filtru $H(z)$, la intrarea căruia punem semnalul sumă de sinusoide (de amplitudini egale)

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \sin(k\omega_0 n).$$

Amplitudinile α_k ale armonicelor semnalului de ieşire $y[n]$ vor depinde de caracteristica de frecvenţă a filtrului.

Programul `lab3_muzica.m` conţine un astfel de model, împreună cu unele sunete predefinite (în care valorile α_k sunt fixate). După ce veţi fi studiat programul, executaţi-l întâi pentru sunetele predefinite, apoi alegeţi mai multe filtre $H(z)$ şi încercaţi să distingeţi diferenţele de timbru între sunetele obţinute (având grijă ca spectrele semnalelor obţinute să fie suficient de diferite). Chiar dacă nu vă veţi apropia de instrumente existente, aveţi şansa de a inventa unele noi !