Laboratorul 4

Proiectarea filtrelor FIR prin metoda ferestrei

4.1 Tema

Înţelegerea metodei ferestrei pentru proiectarea filtrelor FIR. Rezolvarea unor probleme de proiectare de tip ”răspuns cu toleranţe fixate” cu ajutorul metodei ferestrei. Studierea caracteristicilor în frecvenţă ale mai multor tipuri de ferestre.

4.2 Suport teoretic

Metoda ferestrei este una dintre cele mai simple proceduri de proiectare a filtrelor FIR. Ea se bazează pe modularea în timp a unui răspuns ideal cu un semnal de tip ”fereastră”, care are suport finit. Ordinul M al filtrului se fixează în prealabil, iar filtrul are forma generală

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n}.$$

Algoritmul de proiectare este următorul:

0. *Date de proiectare:* ordinul M al filtrului şi amplitudinea răspunsului ideal în frecvenţă care trebuie aproximat; de exemplu, pentru filtrul trece-jos din figura 4.1, se precizează frecvenţa ω_t care delimitează banda de trecere $[0, \omega_t]$ de cea de oprire $[\omega_t, \pi]$.

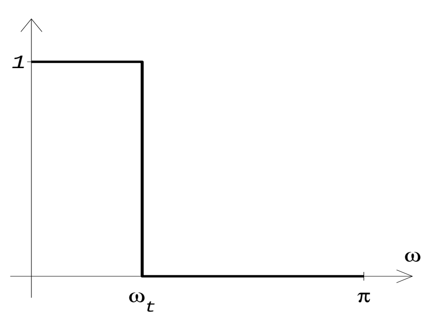

Figura 4.1: Caracteristica de frecvenţă (amplitudine) a filtrului ideal trece-jos.

1. Se calculează răspunsul la impuls al filtrului ideal, considerând întârzierea de grup $n_0 = M/2$ (deci faza filtrului este liniară). De exemplu, pentru un filtru trece-jos, răspunsul ideal în frecvenţă este

$$H_{id}(\mathrm{e}^{j\omega}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \leq \omega_t, \\ 0, & \text{dacă } \omega_t < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \tag{4.1}$$

iar răspunsul la impuls este

$$h_{id}[n] = \frac{\sin \omega_t (n - n_0)}{\pi (n - n_0)}.$$

2. Se alege o fereastră $f[n]$ cu suport $0 : M$.

3. Se calculează coeficienţii filtrului FIR modulând în timp răspunsul ideal $h_{id}[n]$ cu fereastra $f[n]$, i.e. prin relaţia $h[n] = h_{id}[n] \cdot f[n]$, $n = 0 : M$. Eventual, se înmulţesc toţi coeficienţii $h[n]$ cu o constantă potrivit aleasă (de exemplu astfel încât $H(1) = \sum_{n=0}^{M} h[n] = 1$).

Observaţia 4.1 După aplicarea algoritmului se trasează răspunsul în frecvenţă al filtrului FIR obţinut şi se verifică dacă este convenabil. Dacă nu este convenabil, se poate mări ordinul M sau se poate alege o altă fereastră $f[n]$.

Observaţia 4.2 *Alegerea ferestrei.* Răspunsul în frecvenţă al filtrului $H(z)$, scris în funcţie de răspunsurile în frecvenţă ale filtrului ideal şi ferestrei, are forma

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(\mathrm{e}^{j\theta}) F(\mathrm{e}^{j(\omega - \theta)}) d\theta.$$

Pentru ca $H(\mathrm{e}^{j\omega})$ să fie cât mai aproape de $H_{id}(\mathrm{e}^{j\omega})$, e necesar ca $F(\mathrm{e}^{j\omega})$ să fie o aproximaţie cât mai bună a impulsului unitate (continuu) $\delta(\omega)$. (Cerinţele ca fereastra să aibă suport finit în timp şi ca spectrul ei să fie cât mai concentrat în jurul frecvenţei $\omega = 0$ sunt contradictorii.)

Ferestre uzuale

Fereastra dreptunghiulară, cea mai simplă fereastră, este definită de

$$f_d[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Fereastra triunghiulară (Bartlett):

$$f_t[n] = \begin{cases} 2n/M, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & \text{dacă } M/2 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Fereastra Hanning:

$$f_{Hann}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fereastra Hamming:

$$f_{Hamm}[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Fereastra Blackman:

$$f_B[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.5}$$

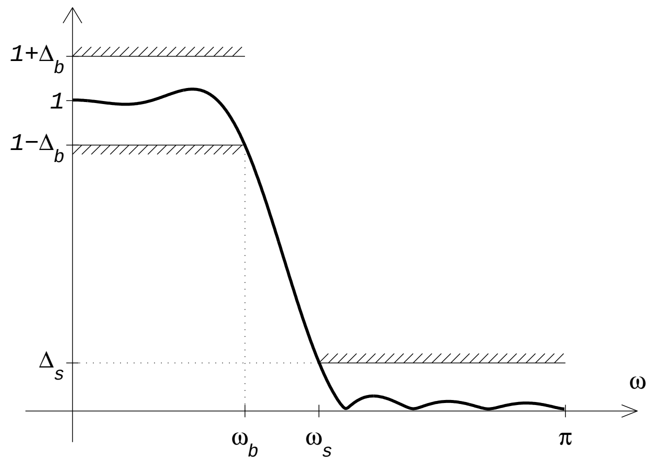

Figura 4.2: Caracteristică de frecvenţă (amplitudine) cu toleranţe şi exemplu de răspuns care satisface specificaţiile.

Fereastra Kaiser:

$$f_B[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-[(n-n_0)/n_0]^2})}{I_0(\beta)}, & \text{dacă } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \tag{4.6}$$

unde $I_0(\cdot)$ este funcţia Bessel de ordinul zero modificată. Parametrul β permite varierea proprietăţilor ferestrei; pentru $\beta = 0$ se obţine fereastra dreptunghiulară.

Pentru filtrele simple, e.g. de tip trece-jos, există unele metode empirice de alegere a ordinului M şi, pentru fereastra Kaiser, a parametrului β.

Răspuns cu toleranţe fixate

Un mod curent de specificare a performanţelor dorite pentru un filtru FIR este cel prezentat în figura 4.2, pentru un filtru trece-jos. Plecând de la un răspuns ideal în frecvenţă, se fac două feluri de aproximări:

- Răspunsul în frecvenţă este precizat cu toleranţe, în sensul că se permite o abatere maximă a amplitudinii de la valorile ideale 1 în banda de trecere şi 0 în banda de oprire. Toleranţele sunt Δ_b în banda de trecere $[0, \omega_b]$ şi Δ_s în banda de oprire $[\omega_s, \pi]$; valorile acestor toleranţe constituie date de proiectare.

- În afară de benzile de trecere şi de oprire, răspunsul în frecvenţă conţine şi o bandă de tranziţie (ω_b, ω_s), în care valoarea amplitudinii este indiferentă.

Problema de proiectare poate fi formulată în felul următor:

F_TOL. *Dându-se frecvenţele ω_b şi ω_s şi toleranţele Δ_b şi Δ_s, să se găsească un filtru care satisface cerinţele din figura 4.2.* Filtrul poate avea ordin dat sau se poate dori un filtru de ordin cât mai mic.

4.3 Ghid Matlab

Un filtru FIR trece-jos se proiectează cu metoda ferestrei prin apelul

```
>> h = fir1(M, wt)
```

unde `M` este ordinul filtrului iar `wt` frecvenţa de tăiere (normalizată) a filtrului ideal (4.1). (Frecvenţele au valori normalizate în toate apelurile funcţiilor Matlab de proiectare a filtrelor.) Implicit, funcţia `fir1` utilizează o fereastră de tip Hamming (4.4). Aceeaşi funcţie se poate utiliza pentru proiectarea unui filtru trece-sus, cu apelul

```
>> h = fir1(M, wt, 'high')
```

sau pentru filtre trece-bandă etc. cu moduri de apel dezvăluite de comanda `help fir1`. Precizarea ferestrei se face cu apelul

```
>> h = fir1(M, wt, f)
```

unde `f` este semnalul fereastră. O fereastră de lungime $N = M + 1$ poate fi generată cu

```
>> f = boxcar(N)
>> f = triang(N)
>> f = hanning(N)
>> f = hamming(N)
>> f = blackman(N)
>> f = kaiser(N, beta)
```

obţinându-se, în ordine, ferestrele dreptunghiulară, triunghiulară, Hanning, Hamming, Blackman şi Kaiser (cu parametrul β).

Funcţia `kaiserord` întoarce parametrii necesari rezolvării (aproximative a) unei probleme **F_TOL** cu un apel la `fir1`, utilizând o fereastră Kaiser.

4.4 Sarcini de lucru

Tema 4.1 (Răspunsurile la impuls şi în frecvenţă ale ferestrelor uzuale)

Consideraţi ferestrele (4.2–4.6), pentru $M = 16$. Pentru fereastra Kaiser se vor alege mai multe valori ale parametrului β, între 0 şi 6.

a. Trasaţi răspunsurile la impuls ale acestor ferestre (obţinute cu funcţiile Matlab `boxcar`, `triang` etc.). De exemplu, pentru fereastra Hamming, trebuie să executaţi instrucţiunile

```
>> f = hamming(M+1);
>> stem(f)
```

b. Desenaţi amplitudinile răspunsurilor în frecvenţă ale ferestrelor de mai sus, normând răspunsurile astfel încât amplitudinea la frecvenţă nulă să fie unitară. De exemplu, se pot utiliza

```
>> f = f / sum(f);
>> freqz(f)
```

unde `f` este răspunsul la impuls calculat mai sus.

c. Comentaţi şi comparaţi proprietăţile în frecvenţă ale ferestrelor. Observaţi că, în general, lăţimea lobului principal şi înălţimea lobilor secundari sunt în relaţie inversă, i.e. un lob principal îngust e însoţit de lobi laterali înalţi, iar un lob lateral lat apare împreună cu lobi laterali joşi.

Tema 4.2 (Filtre proiectate cu diverse ferestre)

a. Folosind metoda ferestrei, proiectaţi filtre FIR trece-jos de ordin $M = 16$, cu frecvenţa de tăiere $\omega_t = 0.4\pi$ folosind toate tipurile de ferestre studiate la tema anterioară. (Puteţi utiliza funcţia Matlab `fir1` sau scrie o funcţie echivalentă.) Comparati caracteristicile de frecvenţă ale filtrelor obţinute şi evaluaţi calităţile lor. Observaţi că răspunsurile cu atenuare mare în banda de trecere au benzi de tranziţie largi, iar cele cu benzi de tranziţie înguste au atenuări mici.

b. Alegeţi o fereastră şi, ţinând $\omega_t = 0.4\pi$, măriţi ordinul filtrului, luând e.g. $M = 24$, apoi $M = 32$. Observaţi modificările caracteristicii de frecvenţă.

Tema 4.3 (Utilizarea metodei ferestrei pentru rezolvarea problemei F_TOL)

Dorim să rezolvăm o problemă **F_TOL**, pentru un filtru trece-jos; aşadar, se dau ω_b, ω_s, Δ_b, Δ_s, cu semnificaţia din figura 4.2. Folosind metoda ferestrei, putem proceda (suboptimal) în felul următor:

1. Alegem ordinul M şi frecvenţa de tăiere ω_t astfel încât $\omega_b < \omega_t < \omega_s$.
2. Utilizând metoda ferestrei, cu datele M şi ω_t, proiectăm un filtru FIR $H(z)$.
3. Verificăm dacă filtrul $H(z)$ satisface cerinţele problemei **F_TOL**. Aceasta se face calculând abaterea maximă de la răspunsul ideal, în benzile de trecere şi oprire. De exemplu, presupunând că `h` este răspunsul la impuls al filtrului, eroarea în banda de trecere $[0, \omega_b]$ este (`wb` este frecvenţa nenormalizată)

```
>> grila_frecv = 0:wb/1000:wb;   % se iau suficient de multe puncte
>> H = freqz(h,1,grila_frecv);
>> Deltab_real = max(abs(1 - abs(H)));
```

4. Dacă am obţinut un filtru valid, putem încerca găsirea unei soluţii de ordin mai mic. Micşorăm M şi reluăm de la pasul 2.
5. Dacă nu am obţinut un filtru valid putem i) mări ordinul filtrului, ii) modifica ω_t (cum ?), sau iii) alege altă fereastră. Cu noile valori, reluăm de la pasul 2.

a. Scrieţi o funcţie Matlab care primeşte ca argumente răspunsul la impuls al unui filtru FIR şi frecvenţele ω_b, ω_s definind benzile de trecere, respectiv oprire ale unui filtru trece-jos. Funcţia întoarce abaterile maxime $\tilde{\Delta}_b$ şi $\tilde{\Delta}_s$ în benzile de trecere, respectiv oprire.

b. Folosind algoritmul sugerat mai sus şi funcţia scrisă la punctul **a**, proiectaţi un filtru FIR trece-jos care să rezolve problema **F_TOL** cu $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.5\pi$, $\Delta_b = 0.05$, $\Delta_s = 0.05$. (Scrieţi un program care să proiecteze un singur filtru, dându-se M, ω_t şi tipul ferestrei. Modificaţi "manual" argumentele, în căutarea unei soluţii mai bune.)

Tema 4.4 (Concurs de proiectare)

La o oră fixată de comun acord, cadrul didactic îndrumător vă va comunica datele unei probleme **F_TOL** (i.e. ω_b, ω_s, Δ_b, Δ_s), pe care trebuie să o rezolvaţi în 10 minute.

Proiectanţii celui mai bun filtru vor fi premiaţi (cu puncte suplimentare la laborator). Filtrul cel mai bun are ordinul cel mai mic. La ordine egale, câştigă filtrul cu abateri mai mici de la răspunsul ideal (mai precis, cel pentru care valoarea $\tilde{\Delta}_b + \tilde{\Delta}_s$ este mai mică).

Tema 4.5 (Supliment: un filtru nestandard) Utilizând metoda ferestrei, proiectaţi un filtru FIR cu $M = 20$, pornind de la răspunsul ideal

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \le \pi/2, \\ 1/2, & \text{dacă } \pi/2 < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$