Laboratorul 5

Proiectarea filtrelor FIR prin optimizare

5.1 Tema

Studierea practică a două metode de proiectare a filtrelor FIR prin optimizare, prima după un criteriu pătratic, a doua după un criteriu Chebyshev (minmax). Observarea diferenţelor între filtrele obţinute cu cele două metode. Scrierea unui algoritm pentru o problemă de proiectare particulară.

5.2 Suport teoretic

5.2.1 Formularea problemei de optimizare

În această lucrare, vom discuta metode de optimizare a coeficienţilor unui filtru FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}, \tag{5.1}$$

al cărui ordin M este fixat dinainte. Optimizarea se realizează având ca obiectiv o caracteristică de frecvenţă notată $D(\omega)$ şi numită *răspuns dorit*. De exemplu, pentru un filtru trece-jos răspunsul dorit poate fi

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b], \\ 0, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi], \end{cases} \tag{5.2}$$

unde valorile ω_b şi ω_s sunt parametri de proiectare. Dorim să găsim filtrul (5.1) al cărui răspuns în frecvenţă $H(\omega)$ este cel mai apropiat de $D(\omega)$, pe mulţimea de frecvenţe $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$. Distanţa între două răspunsuri se măsoară utilizând o normă în spaţiul funcţiilor definite pe $\mathcal{F}$. Uzuale sunt normele 2 şi infinit, pentru care obţinem problemele de proiectare următoare.

F_OPT2. *Dându-se un răspuns dorit $D(\omega)$ pe o mulţime de frecvenţe $\mathcal{F} \in [0, \pi]$, e.g. (5.2), să se găsească filtrul (5.1) al cărui răspuns în frecvenţă $H(\omega)$ este cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma 2, i.e.*

$$\min_h \int_{\omega \in \mathcal{F}} [D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega. \tag{5.3}$$

F_OPTINF. *Cu aceleaşi specificaţii de proiectare ca în problema de mai sus, să se găsească filtrul (5.1) cu $H(\omega)$ cel mai aproape în amplitudine de $D(\omega)$, în norma infinit,* *i.e.*

$$\min_h \max_{\omega\in\mathcal{F}} |D(\omega) - |H(\omega)||. \tag{5.4}$$

Observaţia 5.1 Proiectarea unui filtru prin rezolvarea problemei **F_OPT2** se mai numeşte şi proiectare în sensul *celor mai mici pătrate* (CMMP). Rezolvarea problemei **F_OPTINF** se numeşte şi proiectare în sens *Chebyshev* (citiţi Cebâşev) sau *minmax*.

Observaţia 5.2 În problemele **F_OPT2** şi **F_OPTINF** se pot impune restricţii suplimentare asupra filtrului, de exemplu condiţii de simetrie care asigură liniaritatea fazei. Astfel de restricţii micşorează numărul de variabile ale problemei de optimizare.

Observaţia 5.3 În formulările problemelor **F_OPT2** şi **F_OPTINF**, importanţa erorii $D(\omega)-|H(\omega)|$ este aceeaşi pentru toate frecvenţele. Pentru a avea erori mai mici în anumite zone (de exemplu în banda de oprire), se poate introduce e.g. în (5.3) o funcţie de ponderare $p(\omega) > 0$, astfel încât problema de optimizare să fie

$$\min_h \int_{\omega\in\mathcal{F}} p(\omega)[D(\omega) - |H(\omega)|]^2 d\omega. \tag{5.5}$$

Observaţia 5.4 În problemele **F_OPT2** şi **F_OPTINF** se optimizează doar *amplitudinea* răspunsului în frecvenţă al filtrului $H(z)$. Pentru a optimiza întregul răspuns în frecvenţă, se alege un răspuns dorit $D_c(\omega)$ complex şi se înlocuieşte e.g. (5.3) cu

$$\min_h \int_{\omega\in\mathcal{F}} |D_c(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega. \tag{5.6}$$

5.2.2 Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP

Ne ocupăm aici de proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP prin rezolvarea problemei **F_OPT2** în varianta cea mai generală, în care

- criteriul de optimizare este (5.6), i.e. răspunsul dorit $D_c(\omega)$ este complex;
- nu există nici o restricţie asupra coeficienţilor filtrului $H(z)$ (e.g. de tip fază liniară).

Răspunsul în frecvenţă al filtrului $H(z)$, de ordin M fixat, poate fi scris în forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} = h^T e(\omega), \tag{5.7}$$

unde

$$h = [\ h[0]\ h[1]\ \ldots\ h[M]\ ]^T \in \mathbb{R}^{M+1} \tag{5.8}$$

este vectorul coeficienţilor filtrului (care reprezintă variabilele problemei de optimizare), iar

$$e(\omega) = [1\ e^{-j\omega}\ \ldots\ e^{-j\omega M}]^T \in \mathbb{C}^{M+1} \tag{5.9}$$

este un vector cunoscut pentru orice frecvenţă ω.

Pentru a rezolva problema (5.6), observăm că utilizând (5.7) obţinem

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 &= [h^T e(\omega) - D_c(\omega)][e^H(\omega)h - D_c^*(\omega)] \\ &= h^T e(\omega)e^H(\omega)h - 2\mathrm{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]h + |D_c(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Mai mult, matricea

$$e(\omega)e^H(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{j\omega} & \dots & \mathrm{e}^{j\omega M} \\ \mathrm{e}^{-j\omega} & 1 & \ddots & \mathrm{e}^{j\omega(M-1)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathrm{e}^{-j\omega M} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = C(\omega) + jS(\omega)$$

are structură Toeplitz hermitică; partea sa reală

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \dots & \cos(\omega M) \\ \cos(\omega) & 1 & \ddots & \cos(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cos(\omega M) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

este o matrice Toeplitz simetrică, iar partea imaginară

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega) & \dots & \sin(\omega M) \\ -\sin(\omega) & 1 & \ddots & \sin(\omega(M-1)) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\sin(\omega M) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

este o matrice Toeplitz antisimetrică. Notând

$$g^T(\omega) = \mathrm{Re}[e^H(\omega)D_c(\omega)]$$

şi, observând că $h^T S(\omega)h = 0$, putem scrie

$$|H(\mathrm{e}^{j\omega}) - D_c(\omega)|^2 = h^T C(\omega)h - 2g^T(\omega)h + |D_c(\omega)|^2.$$

Aşadar, ignorând termenul care nu depinde de h, problema de optimizare (5.6) poate fi scrisă în forma

$$\min_{h\in\mathbb{R}^{M+1}} h^T \left(\int_{\omega\in\mathcal{F}} C(\omega)d\omega\right) h - 2\left(\int_{\omega\in\mathcal{F}} g^T(\omega)d\omega\right) h. \tag{5.11}$$

Notând

$$P = \int_{\omega\in\mathcal{F}} C(\omega)d\omega, \quad q = \int_{\omega\in\mathcal{F}} g(\omega)d\omega, \tag{5.12}$$

putem scrie (5.6) în forma

$$\min_{h\in\mathbb{R}^{M+1}} h^T Ph - 2q^T h. \tag{5.13}$$

Aceasta este o problemă de optimizare fără restricţii, în care criteriul este pătratic.

Propoziţia 5.1 *Filtrul FIR reprezentând soluţia problemei de proiectare (5.6) în sens CMMP este*

$$h = P^{-1}q. \tag{5.14}$$

În concluzie, algoritmul de proiectare este următorul:

0. *Date de proiectare:* ordinul M al filtrului, răspunsul ideal în frecvenţă $D_c(\omega)$ (cu valori complexe) care trebuie aproximat şi mulţimea de frecvenţe $\mathcal{F}$ pe care se face aproximaţia.
1. Se calculează matricea P şi vectorul q din (5.12).
2. Se calculează $h = P^{-1}q$.

5.2.3 Proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev

Proiectarea în sens Chebyshev a filtrelor FIR cu fază liniară se face cu ajutorul celebrului algoritm Parks-McClellan, care rezolvă exact problema **F_OPTINF**. O descriere succintă a acestui algoritm este prezentată în curs.

5.3 Ghid Matlab

Funcţia `firls` permite proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR cu *fază liniară*. Modul de apel este următorul

```
>> h = firls(M, W, A)
```

Ordinul filtrului este `M`. Parametrii `W` şi `A` sunt vectori care descriu răspunsul dorit. Cei doi vectori au lungimi pare şi egale. Vectorul `W` conţine frecvenţele normalizate reprezentând benzile de interes; de exemplu, în cazul unui răspuns dorit de tip trece-jos, vectorul este

```
>> W = [0 wb ws 1]
```

unde `wb` şi `ws` sunt frecvenţe date (normalizate), care descriu benzile de trecere, respectiv oprire. Deci, prima bandă (de trecere, în cazul de mai sus) este între `W(1)` şi `W(2)`, a doua (de oprire) este între `W(3)` şi `W(4)` etc. Benzile de tranziţie sunt între `W(2)` şi `W(3)`, `W(4)` şi `W(5)` etc. Vectorul `A` descrie valorile răspunsului dorit în benzile de interes. În exemplul nostru, vectorul este

```
>> A = [1 1 0 0]
```

Prima pereche de elemente descrie o bandă de trecere, iar a doua o bandă de oprire. În general, răspunsul dorit este format din segmente de dreaptă unind punctele de coordonate (`W(k)`,`A(k)`) şi (`W(k+1)`,`A(k+1)`), unde `k` este un număr impar. (Acest răspuns este mai general decât cel constant pe porţiuni, utilizat în exemplele noastre.)

Introducerea unor ponderi în criteriul CMMP se face adăugând un al patrulea parametru de apel

```
>> h = firls(M, W, A, p)
```

Vectorul `p` are jumătate din lungimea lui `W` şi `A`, fiecare valoare din `p` corespunzând unei perechi de valori din cei doi vectori. O valoare din `p` este ponderea (constantă) asociată, în criteriul pătratic, benzii de frecvenţe corespunzătoare. Dacă, în exemplul nostru de filtru trece-jos, vrem să dăm abaterii de la răspunsul dorit pondere 1 în banda de trecere şi 10 în banda de oprire (cu scopul de a creşte atenuarea în banda de oprire), atunci punem

```
>> p = [1 10]
```

Algoritmul Parks-McClellan pentru proiectarea în sens Chebyshev a filtrelor cu fază liniară se face cu funcţia `remez`. Modul de apel este

```
>> h = remez(M, W, A)
```

Argumentele sunt aceleaşi ca la funcţia `firls` de proiectare în sens CMMP.

5.4 Sarcini de lucru

Tema 5.1 (Optimizarea filtrelor FIR cu fază liniară)

Consideraţi problema de proiectare a unui filtru trece-jos cu răspunsul dorit (5.2), în care ω_b şi ω_s au valori fixate (luaţi, de exemplu, $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$).

a. Utilizând funcţia `firls`, proiectaţi în sens CMMP filtre FIR cu ordine M de la 10 la 30 şi observaţi diferenţele dintre caracteristicile lor de frecvenţă. (Convingeţi-vă că faza este liniară, atât din răspunsul în frecvenţă, cât şi din valorile coeficienţilor filtrelor.)

b. Utilizând funcţia `remez`, proiectaţi în sens Chebyshev filtre FIR cu ordine M de la 10 la 30 şi observaţi diferenţele dintre ele. (Pentru acest tip de filtre, observaţi înălţimea egală a lobilor din benzile de trecere, respectiv oprire.)

c. Pentru M fixat (mai mare ca 20), desenaţi pe acelaşi grafic răspunsurile în frecvenţă a două filtre optime, în sens CMMP, respectiv Chebyshev. Care este atenuarea minimă a fiecăruia, în banda de oprire ?

d. Introduceţi o funcţie de ponderare

$$p(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_b], \\ 5, & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi]. \end{cases}$$

Pentru o singură valoare a ordinului M, reproiectaţi filtre optime în sens CMMP, respectiv Chebyshev. Comparaţi-le cu cele de la punctele **a**, respectiv **b**. Pentru filtrul Chebyshev, ce relaţie este între eroarea maximă din banda de oprire şi cea din banda de trecere ?

e. Proiectaţi filtre trece-sus şi trece-bandă, de ordin $M = 20$, cu specificaţii potrivite scopului propus. Desenaţi răspunsurile lor în frecvenţă, pentru a vă convinge de validitatea rezultatelor obţinute.

Tema 5.2 (Proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR fără restricţie de fază)

Programul `opt2c_tj.m` implementează algoritmul de proiectare în sens CMMP a unui filtru FIR trece-jos fără restricţii de fază, conform descrierii din secţiunea teoretică 5.2.2. Datele de proiectare sunt ordinul filtrului M şi răspunsul dorit (complex)

$$D_c(\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-j\omega n_0}, & \text{dacă } |\omega| \le \omega_b, \\ 0, & \text{dacă } \omega_s < |\omega| \le \pi. \end{cases} \tag{5.15}$$

Frecvenţele ω_b şi ω_s, precum şi întârzierea de grup n_0 sunt date de proiectare. Întârzierea de grup (group delay) a unui filtru este derivata fazei răspunsului în frecvenţă al filtrului (cu semn schimbat), i.e.

$$\mathrm{grd}H(\mathrm{e}^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\mathrm{arg}H(\mathrm{e}^{j\omega}). \tag{5.16}$$

Filtrele cu fază liniară au, în mod evident, întârziere de grup constantă.

Pentru înţelegerea programului, precizăm că avem

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \frac{\sin(n\omega_2)}{n} - \frac{\sin(n\omega_1)}{n} = \omega_2 \mathrm{sinc}(n\omega_2) - \omega_1 \mathrm{sinc}(n\omega_1).$$

Matricea P din (5.12) moşteneşte structura Toeplitz a matricei $C(\omega)$ din (5.10), şi cum $\mathcal{F} = [0, \omega_b] \cup [\omega_s, \pi]$, rezultă că elementele sale au forma

$$\omega_b \mathrm{sinc}(n\omega_b) - \omega_s \mathrm{sinc}(n\omega_s) + \pi\delta[n],$$

cu $n = 0 : M$; am ţinut seama că $\mathrm{sinc}(n\pi) = \delta[n]$. (Nu uitaţi că funcţia Matlab `sinc` are o definiţie diferită de cea matematică $\mathrm{sinc}(\alpha) = \sin\alpha/\alpha$.) Similar obţinem vectorul q din (5.12), ţinând seama de expresia (5.15) răspunsului dorit $D_c(\omega)$ şi de faptul că banda de oprire nu contribuie la integrală.

a. Proiectaţi filtre trece-jos cu valorile ω_b şi ω_s folosite la tema anterioară. Luaţi $M = 20$ şi alegeţi mai multe valori pentru întârzierea de grup n_0, astfel încât $M/4 \le n_0 \le 3M/4$. Desenaţi răspunsul în frecvenţă al filtrelor obţinute şi observaţi că faza este neliniară, mai puţin în cazul $n_0 = M/2$. Apelaţi funcţia `grpdelay` pentru a vedea deviaţia de la liniaritate.

b. Modificaţi programul `opt2c_tj.m` astfel încât să proiectaţi filtre trece-sus şi trece-bandă şi comparaţi rezultatele obţinute cu cele de la punctul **e** al temei precedente.

Tema 5.3 (Supliment: proiectarea filtrelor FIR în sens Chebyshev utilizând programarea liniară)

În problema **F_OPTINF**, optimizarea se face pe întreaga mulţime de frecvenţe $\mathcal{F}$. Alternativ, problema poate fi tratată aproximativ, în sensul că mulţimea continuă de frecvenţe $\mathcal{F}$ se înlocuieşte cu o grilă discretă de frecvenţe $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{F}$ având L puncte:

> **F_OPTINFD.** *Dându-se un răspuns dorit* $D(\omega)$ *şi mulţimea de frecvenţe discrete* $\mathcal{G}_L = \{\omega_1, \ldots, \omega_L\}$ *să se rezolve*
>
> $$\min_h \max_{k=1:L} |D(\omega_k) - |H(\omega_k)||. \quad (5.17)$$

Studiaţi din curs metoda de rezolvare prin programare liniară a acestei probleme de optimizare, implementaţi programul descris acolo şi comparaţi filtrele obţinute cu cele proiectate prin metodele studiate anterior.