Laboratorul 6

Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare

6.1 Tema

Proiectarea filtrelor IIR utilizând prototipuri analogice şi transformarea biliniară. Utilizarea rutinelor Matlab pentru proiectarea filtrelor Butterworth, Chebyshev, eliptic. Soluţia IIR a unei probleme de proiectare de tip răspuns cu toleranţe fixate.

6.2 Suport teoretic

Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare are loc conform schemei din figura 6.1. Performanţele specificate ale filtrului digital (e.g. în forma unei probleme **F_TOL**, vezi lucrarea 4) sunt transformate în performanţe echivalente în domeniul continuu; pe baza acestora se proiectează filtrul analogic $H(s)$, din care, printr-o transformare $z = f(s)$, se obţine filtrul dorit $H(z)$. Se observă că metoda are două componente principale:

- transformarea f între domeniile discret şi continuu, care trebuie să fie biunivocă;
- proiectarea filtrelor analogice (în timp continuu).

Vom prezenta în continuare detalii ale celor două componente. Peste tot vom nota ω frecvenţa în domeniul discret şi Ω frecvenţa în domeniul continuu. Aşadar, dacă $H(s)$ şi $G(z)$ sunt funcţii de transfer în continuu, respectiv discret, atunci caracteristicile lor de frecvenţă sunt $H(j\Omega)$, respectiv $G(\mathrm{e}^{j\omega})$.

Transformarea biliniară

Transformarea cea mai utilizată este cea *biliniară*, definită de relaţia

$$z = \frac{1+s}{1-s}, \tag{6.1}$$

a cărei inversă este

$$s = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \tag{6.2}$$

Transformarea continuu-discret a frecvenţelor se obţine din (6.1) înlocuind $s = j\Omega$ şi $z = \mathrm{e}^{j\omega}$. Din

$$\mathrm{e}^{j\omega} = \frac{1+j\Omega}{1-j\Omega} \tag{6.3}$$

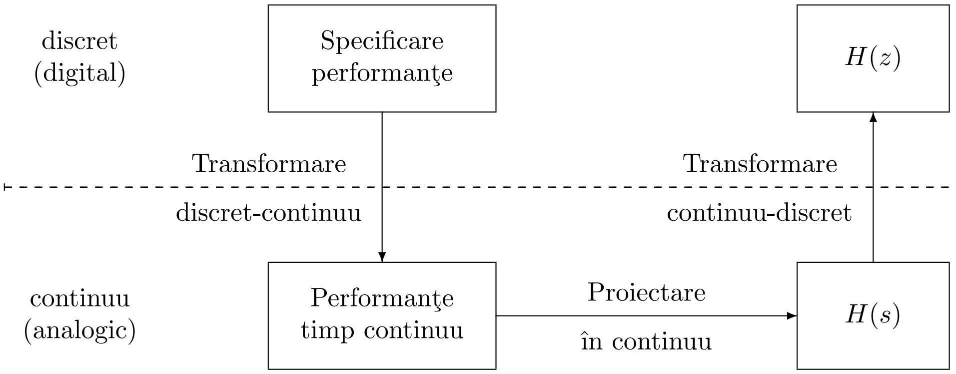

Figura 6.1: Schema generală de proiectare a filtrelor IIR prin metode de transformare.

se obţin relaţiile

$$\begin{aligned} \omega &= 2\mathrm{arctg}\Omega, \\ \Omega &= \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Desigur, transformarea $\omega = 2\mathrm{arctg}\Omega$, care duce $\mathbb{R}$ în $[-\pi, \pi]$, este neliniară.

Filtre analogice

Proiectarea filtrelor analogice se face îndeosebi cu ajutorul unor filtre tip, pentru care există o modalitate analitică de descriere. Cele mai întâlnite filtre sunt numite Butterworth, Chebyshev (tip I sau II) şi Cauer (sau eliptic).

Filtrul Butterworth. Un astfel de filtru este definit de ordinul său n şi de o frecvenţă de tăiere Ω_t. Caracteristica de frecvenţă $H(j\Omega)$ a filtrului satisface relaţia

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_t)^{2n}}. \tag{6.5}$$

După cum se vede în figura 6.2, amplitudinea răspunsului în frecvenţă al filtrului Butterworth este descrescătoare. La frecvenţa de tăiere Ω_t, avem întotdeauna $|H(j\Omega_t)| = 1/\sqrt{2}$, i.e. aceasta este frecvenţa la care atenuarea este de 3dB (reamintim că $\log_{10} 2 \approx 0.3$, deci $20\log_{10}(1/\sqrt{2}) \approx -3$); de asemenea, amplificarea $H(0) = 1$ este constantă. Cu cât ordinul n este mai mare, cu atât tranziţia în jurul valorii ω_t este mai abruptă.

Funcţia de transfer $H(s)$ se determină prelungind analitic relaţia (6.5) (valabilă pentru $s = j\Omega$) şi obţinând

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_t)^{2n}}. \tag{6.6}$$

Cei $2n$ poli ai funcţiei $H(s)H(-s)$ sunt definiţi de $(-1)^{1/2n}j\Omega_t$, deci au forma

$$s_k = \Omega_t \exp\left(-j\frac{\pi}{2n}(2k - 1 + n)\right), \quad k = 0 : 2n - 1, \tag{6.7}$$

şi sunt plasaţi echidistant pe un cerc de rază Ω_t centrat în origine, simetric faţă de axa imaginară. Pentru $H(s)$ se iau polii cu parte reală negativă, astfel încât $H(s)$ să fie o funcţie de transfer stabilă.

Filtrul Chebyshev de tip I are un răspuns în frecvenţă cu ondulaţii egale în banda de trecere şi descrescător în banda de oprire. Filtrul Chebyshev de tip II are un răspuns în frecvenţă descrescător în banda de trecere şi cu ondulaţii egale în banda de oprire.

Filtrul eliptic are răspunsul în frecvenţă cu ondulaţii egale atât în banda de trecere cât şi în cea de oprire. (Pentru informaţii suplimentare despre aceste filtre, vezi cursul.)

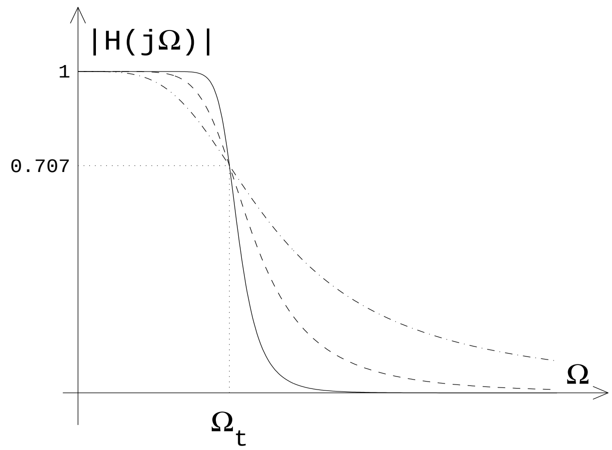

Figura 6.2: Amplitudinea răspunsului în frecvenţă al filtrului Butterworth, pentru $n = 2$ (linie-punct), $n = 4$ (linie întreruptă) şi $n = 10$ (linie continuă).

Proiectarea filtrului Butterworth discret

Fiind o funcţie crescătoare, transformarea în frecvenţă (6.4) păstrează forma răspunsului în frecvenţă al unui filtru analogic, în sensul că e.g. un filtru trece-jos analogic este transformat într-un filtru trece-jos discret. Prin aplicarea transformării biliniare, răspunsul în frecvenţă (6.5) al filtrului Butterworth analogic se transformă în

$$|H(\mathrm{e}^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathrm{tg}(\omega/2)}{\mathrm{tg}(\omega_t/2)}\right)^{2n}}, \quad \omega_t = 2\mathrm{arctg}\Omega_t, \tag{6.8}$$

care reprezintă amplitudinea răspunsului în frecvenţă al filtrului Butterworth discret.

Rezolvarea unei probleme **F_TOL**. Datele de proiectare sunt (vezi lucrarea 4) frecvenţele ω_b, ω_s şi toleranţele Δ_b, Δ_s.

Răspunsul în frecvenţă al unui filtru Butterworth discret care satisface cerinţele este prezentat în figura 6.3 stânga. Notăm $M_b = 1 - \Delta_b$. Graficul este desenat presupunând că cerinţele sunt satisfăcute la limită, dar în general avem

$$|H(\omega_b)| \geq M_b, \quad |H(\omega_s)| \leq \Delta_s. \tag{6.9}$$

Evident, deoarece amplitudinea răspunsului este descrescătoare, avem $M_b \leq |H(\omega)| \leq 1$ pentru $\omega \in [0, \omega_b]$ şi $|H(\omega)| \leq \Delta_s$ pentru $\omega \in [\omega_s, \pi]$.

Pentru proiectarea filtrului, parcurgem următoarele etape: i) transpunem cerinţele de proiectare în domeniul continuu, ii) găsim un filtru analogic care să satisfacă cerinţele, iii) obţinem filtrul discret aplicând transformarea biliniară celui continuu.

i) Filtrul analogic corespunzător celui discret are răspunsul în frecvenţă din figura 6.3 dreapta. Conform cu (6.4), avem

$$\Omega_b = \mathrm{tg}\frac{\omega_b}{2}, \quad \Omega_s = \mathrm{tg}\frac{\omega_s}{2}. \tag{6.10}$$

Dorim să aflăm ordinul n şi frecvenţa de tăiere Ω_t ale unui filtru Butterworth analogic, al cărui răspuns în frecvenţă (6.5) satisface condiţiile obţinute din (6.9), i.e.

$$|H(\Omega_b)| \geq M_b, \quad |H(\Omega_s)| \leq \Delta_s. \tag{6.11}$$

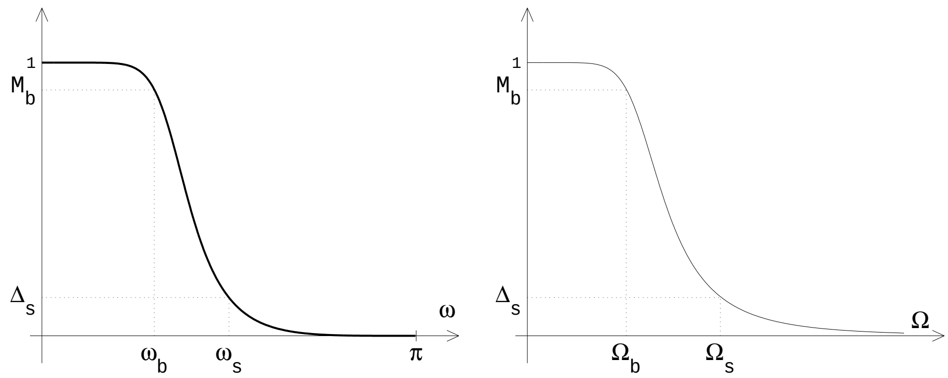

Figura 6.3: Filtre Butterworth discret (stânga) şi analogic (dreapta) satisfăcând cerinţele unei probleme **F_TOL**.

şi deci

$$\frac{1}{1+(\Omega_b/\Omega_t)^{2n}} \geq M_b^2, \quad \frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_t)^{2n}} \leq \Delta_s^2. \tag{6.12}$$

ii) Din (6.12) obţinem

$$\begin{aligned} 2n\,(\log\Omega_t - \log\Omega_b) &\geq \log\frac{M_b^2}{1-M_b^2}, \\ 2n\,(\log\Omega_s - \log\Omega_t) &\geq \log\frac{1-\Delta_s^2}{\Delta_s^2}. \end{aligned}$$

Adunăm cele două inegalităţi de mai sus şi obţinem

$$n \geq \frac{\log\dfrac{M_b^2(1-\Delta_s^2)}{\Delta_s^2(1-M_b^2)}}{2\log\Omega_s/\Omega_b}. \tag{6.13}$$

Desigur, ordinul n trebuie să fie întreg, aşa că îl luăm egal cu primul întreg mai mare ca (6.13). Pentru a calcula Ω_t, impunem egalitatea într-una din inegalităţile (6.12), de exemplu în prima, din care rezultă

$$\Omega_t = \frac{\Omega_b}{\left(\dfrac{1-M_b^2}{M_b^2}\right)^{1/2n}}. \tag{6.14}$$

Am obţinut deci parametrii n şi Ω_t ai filtrului Butterworth analogic, a cărui funcţie de transfer $H(s)$ se calculează uşor ştiind poziţiile (6.7) ale polilor.

iii) În final, filtrul discret $H(z)$ se obţine aplicând transformarea biliniară (6.2) filtrului analogic $H(s)$.

6.3 Ghid Matlab

Filtrul Butterworth analogic se proiectează cu apelul

```
>> [rb, ra, k0] = buttap(N)
```

Funcţia primeşte ordinul filtrului şi întoarce zerourile, polii şi amplificarea acestuia. Frecvenţa de tăiere are valoarea normalizată $\Omega_t = 1$.

Filtrele analogice Chebyshev, de tip I şi II, şi eliptic se proiectează cu funcţiile `cheb1ap`, `cheb2ap` şi, respectiv, `ellipap`.

O metodă de proiectare prin transformare a filtrului Butterworth discret este implementată de funcţia `butter`. Funcţia se apelează cu

```
>> [b, a] = butter(N, wt)
```

`N` este ordinul filtrului iar variabila `wt` corespunde frecvenţei discrete (normalizate) ω_t din (6.8). Funcţia `butter` se comportă într-un mod echivalent următorului algoritm: calculează $\Omega_t = \mathrm{tg}(\omega/2)$, conform cu (6.4), proiectează filtrul analogic de ordinul `N`, apoi aplică transformarea biliniară pentru a obţine filtrul discret dorit.

Filtrele discrete Chebyshev, de tip I şi II, şi eliptic se proiectează cu funcţiile `cheby1`, `cheby2` şi, respectiv, `ellip`. De exemplu, filtrul eliptic se obţine cu

```
>> [b, a] = ellip(N, Rb, Rs, wb)
```

unde `Rb` şi `Rs` caracterizează înălţimea ondulaţiilor în banda de trecere, respectiv în cea de oprire, `N` este ordinul filtrului, iar `wb` este frecvenţa maximă de trecere. Mai exact, dacă ondulaţiile din banda de trecere au înălţime Δ_b, atunci are loc relaţia

$$\mathtt{Rb} = -20\log_{10}(1-\Delta_b) \tag{6.15}$$

iar dacă Δ_s este înălţimea ondulaţiilor în banda de oprire, atunci

$$\mathtt{Rs} = -20\log_{10}\Delta_s, \tag{6.16}$$

i.e. `Rs` este atenuarea, în decibeli, în banda de oprire.

În plus faţă de comportarea deja descrisă, toate funcţiile Matlab de mai sus permit proiectarea unor filtre trece-sus sau opreşte-bandă.

6.4 Sarcini de lucru

Tema 6.1 (Rezolvarea problemei F_TOL cu filtre Butterworth)

Programul `but_f_tol.m` implementează algoritmul descris în finalul părţii teoretice a acestei lucrări. Primele linii ale programului reprezintă implementarea formulelor (6.10), (6.13) şi (6.14). Calculul polilor se face conform formulei (6.7), în care se iau doar polii din semiplanul complex stâng, corespunzând valorilor $k = 1 : n$. Transformarea biliniară se aplică direct asupra polilor (şi nu asupra coeficienţilor filtrului analogic). Dacă funcţia de transfer a filtrului Butterworth analogic este

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(-s_k)}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)},$$

i.e. s_k, $k = 1 : n$, sunt polii filtrului şi $H(0) = 1$, atunci folosind transformarea (6.2) rezultă

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(-s_k)}{\prod_{k=1}^{n}(1-s_k)} \frac{\prod_{k=1}^{n}(1+z^{-1})}{\prod_{k=1}^{n}(1-z^{-1}\frac{1+s_k}{1-s_k})}, \tag{6.17}$$

formulă care evidenţiază amplificarea, zerourile şi polii $z_k = \frac{1+s_k}{1-s_k}$ ai filtrului Butterworth discret. În ultimele instrucţiuni ale programului se ia partea reală pentru a elimina partea imaginară rezultată în urma erorilor numerice.

a. Utilizaţi acest program pentru a rezolva problema **F_TOL** cu datele $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$, $\Delta_b = 0.1$, $\Delta_s = 0.1$.

b. Găsiţi un filtru FIR de ordin cât mai mic care să satisfacă aceleaşi specificaţii. (Folosiţi metoda ferestrei sau o rutină de optimizare.) Desenaţi pe acelaşi grafic amplitudinile răspunsurilor în frecvenţă ale celor două filtre. Comentaţi diferenţele dintre ele. (De asemenea, observaţi că faza filtrului Butterworth este neliniară în banda de trecere.)

Tema 6.2 (Rezolvarea problemei F_TOL cu filtre eliptice)

Considerăm problema **F_TOL** cu datele $\omega_b = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$, $\Delta_b = 0.05$, $\Delta_s = 0.01$.

a. Găsiţi un filtru eliptic care satisface cerinţele problemei. În acest scop, folosiţi funcţia Matlab `ellip`; relaţiile (6.15) şi (6.16) explică legătura parametrilor funcţiei cu toleranţele Δ_b şi Δ_s. Observaţi că funcţia `ellip` nu permite precizarea frecvenţei ω_s. Recurgeţi deci la încercări succesive pentru a găsi *filtrul de grad minim* care rezolvă problema.

b. Pentru aceeaşi problemă de proiectare, găsiţi soluţii Butterworth şi FIR (folosind metoda ferestrei sau o metodă de optimizare). Comparaţi gradele filtrelor (şi numărul de coeficienţi). Care este cel mai bun filtru ?

c. Studiaţi modul de apel al funcţiilor `cheby1` şi `cheby2`, care proiectează filtre de tip Chebyshev. Rezolvaţi problema de proiectare de mai sus cu acest tip de filtre. Comparaţi ordinele filtrelor obţinute cu cele ale filtrelor de mai sus.

Tema 6.3 (Concurs de proiectare)

La o oră fixată de comun acord, cadrul didactic îndrumător vă va comunica datele unei probleme **F_TOL** (i.e. ω_b, ω_s, Δ_b, Δ_s). Proiectanţii soluţiei cu cel mai mic număr de coeficienţi vor fi premiaţi.

Tema 6.4 (Supliment: proiectarea unui filtru Butterworth cu $H(1) \neq 1$)

Modificaţi algoritmul de proiectare din Tema 6.1 astfel încât cerinţele problemei **F_TOL** să fie satisfăcute de un filtru Butterworth pentru care $H(1) = 1 + \Delta_b$. (Spre deosebire, algoritmul din Tema 6.1 consideră $H(1) = 1$, adică amplificare unitară în regim staţionar.) Pentru scrierea algoritmului, demonstraţi că ordinul filtrului se obţine prin modificarea relaţiei (6.13) în

$$n \geq \frac{\log \dfrac{M_b^2[(1+\Delta_b)^2 - \Delta_s^2]}{\Delta_s^2[(1+\Delta_b)^2 - M_b^2]}}{2 \log \Omega_s / \Omega_b}, \tag{6.18}$$

iar frecvenţa de tăiere este

$$\Omega_t = \frac{\Omega_b}{\left[\dfrac{(1+\Delta_b)^2 - M_b^2}{M_b^2}\right]^{1/2n}}. \tag{6.19}$$

În fine, observaţi că funcţia de transfer (6.17) a filtrului trebuie înmulţită cu $1 + \Delta_b$ pentru a obţine amplificarea dorită în regim staţionar.