Laboratorul 7

Schimbarea frecvenţei de eşantionare

7.1 Tema

Studiul, în timp şi în frecvenţă, al decimării, interpolării şi, în general, al schimbării frecvenţei de eşantionare cu un factor raţional.

7.2 Suport teoretic

În această lucrare vom studia modul în care se schimbă frevenţa de eşantionare a unui semnal analogic $x_a(t)$, dispunând *numai* de un semnal discret $x[n]$, obţinut printr-o eşantionare anterioară din semnalul $x_a(t)$.

7.2.1 Decimare

Reducerea de M ori a frecvenţei de eşantionare se poate poate efectua prin *decimarea* semnalului $x[n]$. Semnalul decimat cu factorul M este

$$y[n] \equiv x[n] \downarrow M \stackrel{\text{def}}{=} x[Mn]. \tag{7.1}$$

Teorema 7.1 *Fie $x[n]$ un semnal discret cu energie finită şi $y[n]$ semnalul discret obţinut prin decimare cu factorul M ca în (7.1). Între spectrele celor două semnale are loc relaţia*

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(\frac{\omega + 2\ell\pi}{M}\right). \tag{7.2}$$

Observaţia 7.1 Din (7.2) se observă că, pentru o frecvenţă ω fixată, spectrul $Y(\omega)$ al semnalului decimat cu factorul M este o sumă de M valori ale spectrului semnalului iniţial. Mai precis, pentru a obţine $Y(\omega)$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$, se ia spectrul $X(\omega)$ pe fiecare interval $[(2\ell - 1)\pi/M, (2\ell + 1)\pi/M]$, $\ell = 0 : M - 1$, se deplasează la stânga pentru a coincide cu $[-\pi/M, \pi/M]$, se expandează în frecvenţă cu factorul M, după care se adună cele M spectre astfel obţinute. Distingem două situaţii importante.

1.Dacă semnalul iniţial are spectrul limitat la banda $[-\pi/M, \pi/M]$, deci $X(\omega) = 0$ pentru $\pi/M < |\omega| \leq \pi$, atunci egalitatea (7.2) se reduce la

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} X(\omega/M), \quad \omega \in [-\pi, \pi], \tag{7.3}$$

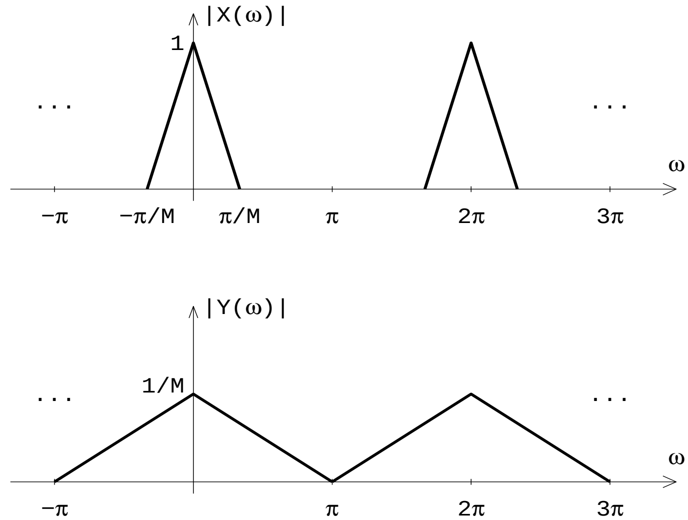

Figura 7.1: Spectrul unui semnal discret $x[n]$ cu banda limitată la $[-\pi/M, \pi/M]$ (sus) şi spectrul semnalului decimat $y[n] = x[Mn]$ (jos).

deci spectrul semnalului decimat are aceeaşi formă ca spectrul semnalului iniţial, dar expandată pe întreg intervalul $[-\pi, \pi]$. Prezentăm în figura 7.1 ilustrarea acestei transformări.

2. Dacă spectrul semnalului iniţial se întinde dincolo de frecvenţa π/M, atunci spectrul semnalului decimat nu mai are, în general, aceeaşi formă ca spectrul semnalului iniţial. Apare fenomenul de *aliere*, ilustrat în figura 7.2.

Pentru a evita alierea (dar afectând spectrul iniţial), se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvenţele superioare lui π/M. Schema de reducere a frecvenţei de eşantionare cu factorul M are atunci aspectul din figura 7.3.

7.2.2 Interpolare (discretă)

Creşterea de M ori a frecvenţei de eşantionare se poate face inserând $M - 1$ eşantioane noi între fiecare două eşantioane ale semnalului iniţial $x[n]$. *Interpolatorul* (discret) cu factorul M este sistemul care atribuie valoarea zero eşantioanelor noi, deci funcţionează după regula

$$y[n] \equiv x[n] \uparrow M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x[n/M], & \text{dacă } n \bmod M = 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{7.4}$$

Teorema 7.2 *Fie $x[n]$ un semnal discret cu energie finită şi $y[n]$ semnalul discret obţinut prin interpolare cu factorul M ca în (7.4). Între spectrele celor două semnale are loc relaţia*

$$Y(\omega) = X(M\omega). \tag{7.5}$$

Observaţia 7.2 Relaţia (7.5) arată că spectrul semnalului interpolat, pe intervalul $[-\pi, \pi]$, este obţinut prin alăturarea a M copii ale unei perioade a spectrului semnalului iniţial; fiecare copie este comprimată de M ori. Figura 7.4 ilustrează acest fenomen, numit replicare.

Pentru a păstra forma spectrului iniţial, se utilizează un filtru trece-jos care taie frecvenţele superioare lui π/M, deci elimină replicile identice cu cea din banda de frecvenţă de bază $[-\pi/M, \pi/M]$; un exemplu de aspect al spectrului după operaţia de filtrare este prezentat în figura 7.4, jos; deoarece filtrarea elimină cele $M - 1$ replici ale spectrului din afara benzii

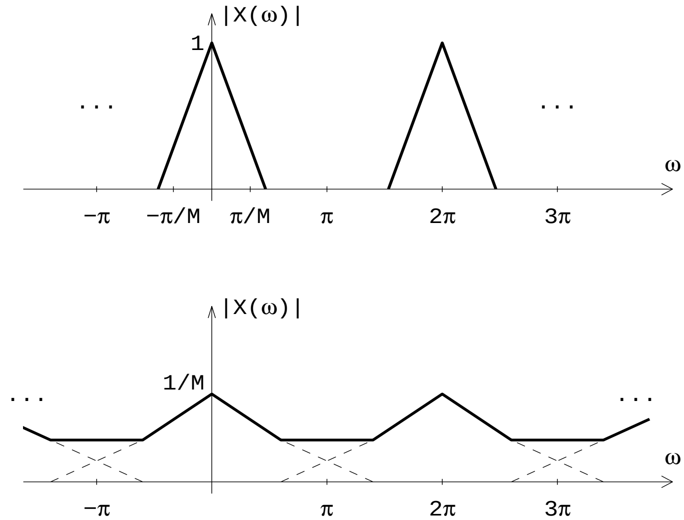

Figura 7.2: Spectrul unui semnal discret a cărui bandă depăşeşte frecvenţa π/M (sus) şi spectrul semnalului decimat, în care este vizibil fenomenul de aliere (jos).

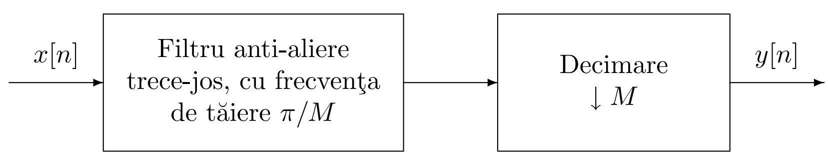

Figura 7.3: Schemă practică de reducere a frecvenţei de eşantionare cu factorul $M \in \mathbb{N}$.

de bază, filtrul trebuie să aibă o amplificare egală cu M, pentru a conserva energia semnalului. Schema de creştere a frecvenţei de eşantionare cu factorul M are aspectul din figura 7.5.

7.2.3 Schimbarea frecvenţei de eşantionare cu un factor raţional

Cazul cel mai general este acela în care frecvenţa de eşantionare creşte de N/M ori (mai precis, creşte atunci când $N > M$ şi scade când $N < M$), unde $N, M \in \mathbb{N}$. Această operaţie de reeşantionare se realizează prin interpolarea semnalului iniţial $x[n]$ cu factorul N, urmată de decimarea cu factorul M a semnalului interpolat. Schema efectivă de implementare are aspectul din figura 7.6. Conectând în serie interpolatorul din figura 7.5 şi decimatorul din figura 7.3, observăm că cele două filtre ideale din schemele respective pot fi înlocuite cu filtrul unic din figura 7.6; acest filtru "moşteneşte" amplificarea N de la interpolare şi frecvenţa de tăiere minimă între π/N (interpolare) şi π/M (decimare).

7.3 Ghid Matlab

Filtrarea unui semnal `x` (cu suport finit) printr-un filtru IIR cu funcţia de transfer $B(z)/A(z)$ se realizează prin

```
>> y = filter(b,a,x)
```

unde `b` şi `a` sunt vectori conţinând coeficienţii polinoamelor $B(z)$, respectiv $A(z)$, în ordine descrescătoare a puterilor.

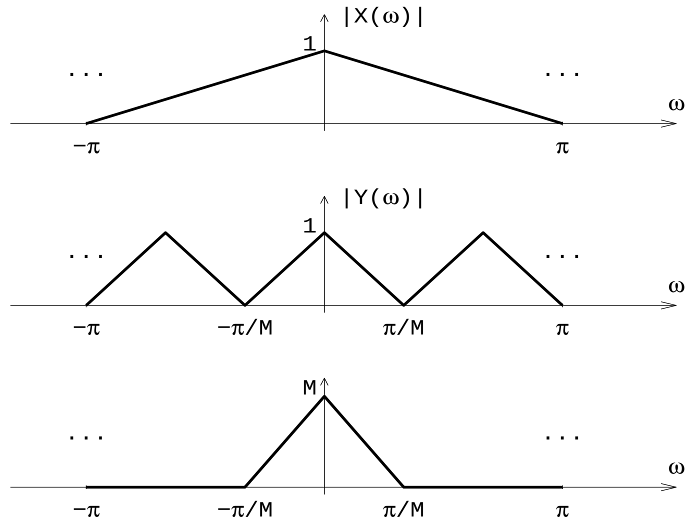

Figura 7.4: Spectrul unui semnal discret $x[n]$ (sus), spectrul semnalului interpolat conform (7.4) (mijloc) şi spectrul semnalului interpolat, după aplicarea unui filtru trece-jos cu frecvenţa de tăiere π/M şi amplificare M (jos), cu $M = 3$.

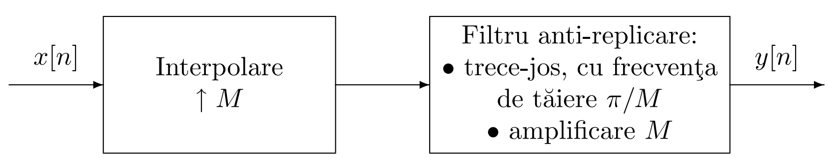

Figura 7.5: Schemă practică de creştere a frecvenţei de eşantionare cu factorul $M \in \mathbb{N}$.

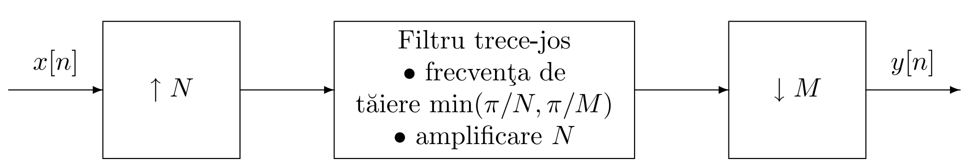

Figura 7.6: Schemă practică de creştere a frecvenţei de eşantionare cu factorul N/M, cu $M, N \in \mathbb{N}$.

Semnalul `y` obţinut din `x` conform schemei de decimare cu factorul M din figura 7.3 se calculează cu

```
>> y = decimate(x,M)
```

Semnalul obţinut conform schemei de interpolare cu factorul M din figura 7.5 se calculează cu

```
>> y = interp(x,M)
```

Schimbarea frecvenţei de eşantionare cu factorul N/M, implementată ca în figura 7.6, se realizează cu

```
>> y = upfirdn(x,h,N,M)
```

unde vectorul `h` conţine coeficienţii unui filtru FIR trece-jos. O altă funcţie cu acelaşi scop, în care filtrul nu mai trebuie precizat de utilizator, se apelează cu

```
>> y = resample(x,N,M)
```

7.4 Sarcini de lucru

Tema 7.1 (Decimare)

a. Scrieţi o funcţie Matlab care primeşte ca argumente semnalul $x[n]$ cu suport finit şi factorul de *decimare* M şi returnează semnalul decimat $y[n] = x[n] \downarrow M$, definit ca în (7.1). Pentru un exemplu de semnal (cu suport de lungime cel mult 20) şi $M = 2$ sau $M = 3$, desenaţi semnalul iniţial $x[n]$ şi pe cel decimat $y[n]$ pe grafice diferite; observaţi efectul temporal al decimării.

b. Luaţi $x[n]$ egal cu suma a două sinusoide reale, cu frecvenţe mai mici decât $\pi/3$ (de exemplu $\omega_1 = \pi/10$ şi $\omega_2 = \pi/6$), amplitudini diferite (de exemplu 2, respectiv 1) şi suport de lungime mult mai mare decât perioada semnalului $x[n]$, de exemplu 1000. Desenaţi amplitudinile spectrelor semnalului $x[n]$ şi ale semnalelor decimate $y_2[n] = x[n] \downarrow 2$ şi $y_3[n] = x[n] \downarrow 3$. Observaţi similaritatea cu transformarea spectrului ilustrată în figura 7.1.

c. Pentru a realiza schema de decimare din figura 7.3, treceţi semnalul $x[n]$ de la punctul anterior printr-un filtru trece-jos cu frecvenţa de tăiere $\pi/3$, apoi decimaţi pentru a obţine $y_2[n]$, respectiv $y_3[n]$. (Proiectaţi filtrul cu funcţia `remez`, luând banda de trecere până la 0.3π şi banda de oprire începând de la 0.4π, iar ordinul cel puţin 30. Folosiţi funcţia `filter` pentru efectuarea filtrării.) Redesenaţi spectrele semnalelor $y_2[n]$ şi $y_3[n]$ şi comparaţi-le cu cele obţinute la punctul **b**. Se observă reducerea alierii ?

Tema 7.2 (Interpolare)

a. Scrieţi o funcţie Matlab care primeşte ca argumente semnalul $x[n]$ cu suport finit şi factorul de *interpolare* M şi returnează semnalul interpolat $y[n] = x[n] \uparrow M$, definit ca în (7.4). Pentru un exemplu de semnal (cu suport de lungime cel mult 20) şi $M = 2$ sau $M = 3$, desenaţi semnalul iniţial $x[n]$ şi pe cel interpolat $y[n]$ pe grafice diferite; observaţi efectul temporal al interpolării.

b. Luaţi $x[n]$ sumă a două sinusoide, la fel ca la tema anterioară. Desenaţi spectrele semnalului $x[n]$ şi ale semnalelor interpolate $y_2[n] = x[n] \uparrow 2$ şi $y_3[n] = x[n] \uparrow 3$. Observaţi fenomenul de replicare, similar cu cel ilustrat în figura 7.4.

c. Luaţi $M = 3$. Pentru a realiza schema de interpolare din figura 7.5, treceţi semnalul $y_3[n]$ de la punctul anterior printr-un filtru trece-jos cu frecvenţa de tăiere $\pi/3$. (Folosiţi acelaşi filtru ca la tema anterioară, dar cu amplificare 3 în loc de 1; eventual alegeţi un ordin mai mare.) Desenaţi spectrul semnalului filtrat şi comparaţi din nou cu figura 7.4.

Tema 7.3 (Schimbarea frecvenţei de eşantionare cu un factor raţional)

a. Scrieţi un program care implementează schema de schimbare a frecvenţei de eşantionare cu factorul N/M, descrisă în figura 7.6. Pentru aceasta, folosiţi funcţiile de decimare, respectiv interpolare scrise anterior; proiectaţi filtrul trece-jos cu funcţia `remez`: notând $P = \max(N, M)$, luaţi banda de trecere până la $0.9\pi/P$ şi banda de oprire începând de la $1.1\pi/P$, iar ordinul cel puţin 30. Luaţi $x[n]$ sumă a două sinusoide, la fel ca în temele anterioare, şi factorii de schimbare a frecvenţei 3/2 şi 3/8. Desenaţi spectrele semnalelor obţinute şi explicaţi forma lor. Dacă observaţi efecte de tip aliere, măriţi ordinul filtrului.

b. Schimbaţi frecvenţa de eşantionare a semnalului `xilo` cu factorii 1/2, 2/3 şi 1/4 (i.e. frecvenţa scade). Observaţi vreo modificare a sunetului ? Eventual, scădeţi şi mai mult frecvenţa de eşantionare.

Tema 7.4 (Supliment)

a. Semnalul $x[n]$ este suma de sinusoide din temele anterioare. Folosiţi programele de la temele anterioare pentru reducerea frecvenţei de eşantionare de i) 6 ori ii) 15/2 ori. Observaţi distorsiunile apărute în spectre şi explicaţi-le.

b. Realizaţi sarcinile de lucru de mai sus utilizând funcţiile Matlab `decimate`, `interpolate` şi `resample`. Observaţi că rezultatele nu sunt identice cu cele obţinute mai devreme. Cauzele sunt nu numai utilizarea altor filtre, dar şi precauţiile luate în funcţiile Matlab pentru a diminua efectele condiţiilor iniţiale la filtrare (mai devreme, le-aţi considerat implicit nule), precum şi compensarea întârzierii introduse de filtrare.